

Przewodnik Nauczyciela

Opis cyklu lekcji

Tytuł cyklu lekcji	Wyrażenia algebraiczne, ich dodawanie i odejmowanie z wykorzystaniem żetonów
Czas trwania	<i>5-8 godzin lekcyjnych (w zależności od tempa pracy uczniów i poziomu nauczania)</i>
Klasa/Wiek	<i>Klasy 6-8 szkoły podstawowej (12-15 lat); Klasa I szkoły ponadpodstawowej (dla uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki)</i>
Cel cyklu lekcji i jego krótki opis	<i>Celem tego cyklu lekcji jest kształtowanie pojęcia wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz dodawania i odejmowania takich wyrażen z wykorzystaniem żetonów. Scenariusz może być wykorzystany zarówno w młodszych klasach jako wprowadzenie wyrażen algebraicznych, jak i na lekcjach powtórzeniowych z uczniami w starszych klasach. Uczniowie w trakcie zabawy z modelem konkretnym (żetonami) budują pojęcie wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz wypracowują rozumienie działania dodawania jako dokładania żetonów i odejmowania jako zabierania żetonów. Dzięki temu uczniowie podejmują się modelowania matematycznego.</i>
Pomoce naukowe	<i>Każdy uczeń ma do dyspozycji i manipulacji po 10 żetonów każdego koloru (biały/czarny) i każdego kształtu (okrągły/podłużny/kwadratowy), łącznie zestaw 60 żetonów.</i>

Uwaga językowa do pracy z żetonami w zakresie liczb całkowitych i wyrażen algebraicznych:

W naszych scenariuszach zwracamy uwagę na to, by świadomie rozdzielić językowo dwa światy – świat matematyki, czyli abstrakcji i świat przedmiotów rzeczywistych – w naszym przypadku żetonów. Dlatego w kontekście żetonów używamy terminów opisujących jego wygląd: biały/czarny żeton okrągły/podłużny/kwadratowy a nie używamy krótkiej formy białe/czarne koło/prostokąt/kwadrat. Podobnie w kontekście żetonów mówimy o dokładaniu i zabieraniu żetonów – a w kontekście matematyki o działaniach dodawania i odejmowania. Zwracamy również uwagę na to, by znaki działań czytać słownie jako dodać/odjąć, a nie tylko czytając nazwę znaku plus/minus. Jesteśmy przekonani, że modelowanie wyrażen arytmetycznych i algebraicznych z dbałością o czystość i poprawność językową jest dużą wartością i ją rekomendujemy.

CZĘŚĆ 4

str. 1

 This material is provided by the [AMMA Team](#), responsible institution: Pedagogical University of Krakow


Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Część 4

Temat: Dodawanie i odejmowanie rozbudowanych wyrażeń algebraicznych na żetonach

AKTYWNOŚĆ 1:

Dodawanie rozbudowanych wyrażeń algebraicznych

- W matematyce często dodajemy i odejmujemy bardziej rozbudowane wyrażenia algebraiczne z zastosowaniem nawiasów. W kolejnej części lekcji nauczymy się, jak je wykonywać.

Przykład 1)

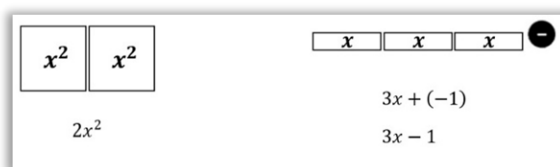
Nauczyciel układa za pomocą żetonów na tablicy dwa wyrażenia algebraiczne - po lewej stronie przyczepia żetony: 2 białe kwadratowe, a po prawej stronie 3 białe podłużne i 1 czarny okrągły. Następnie pyta uczniów jakie wyrażenia zostały przedstawione; podpisują obie grupy żetonów odpowiednimi wyrażeniami algebraicznymi (jak na rysunku poniżej).

- Jakie wyrażenia algebraiczne możemy odczytać?

$$U: 2x^2, \quad 3x + (-1),$$

- Czy możemy to wyrażenie po prawej stronie zapisać krócej?

{Dążymy do tego by pojawił się zapis $3x - 1$ } Zapiszmy to w ten sposób:



Chcemy teraz dodać do wyrażenia $2x^2$ całe wyrażenie algebraiczne $3x - 1$. Czyli chcemy znaleźć wyrażenie jakie otrzymamy w wyniku dodawania: $2x^2 + (3x - 1)$. {Zapisujemy sumę tych wyrażeń i wyróżniamy kolorem znak dodawania sumy}

- Co zrobić, by otrzymać jedno wyrażenie będące sumą tych dwóch?

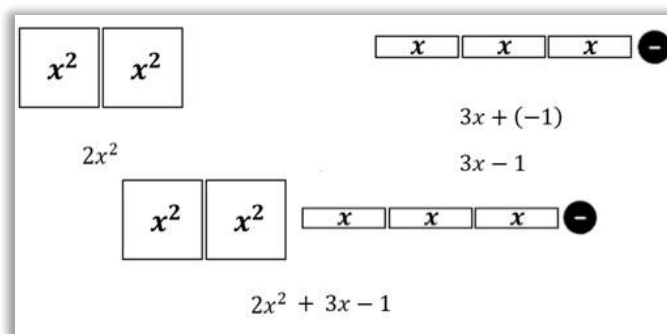
{Dążymy do tego, aby uczniowie powiedzieli, że żetony należy zsunąć tak, aby powstało jedno wyrażenie}

- Ile wynosi suma tych dwóch wyrażeń?

{Jeśli odpowiedź będzie $2x^2 + 3x + (-1)$, to wtedy pytamy czy możemy to zapisać krócej, bez nawiasu. Zsuwamy żetony na środek tablicy)}.

Uczniowie zapisują do zeszytu:





$$2x^2 + (3x + (-1)) = 2x^2 + (3x - 1) = 2x^2 + 3x - 1$$

Nauczyciel podkreśla równość wyrażeń algebraicznych zapisanych w różnych formach.

Przykład 2)

Nauczyciel zapisuje na tablicy dodawanie dwóch wyrażeń algebraicznych: $(-2x^2 - x) + (5x^2 + 3)$.

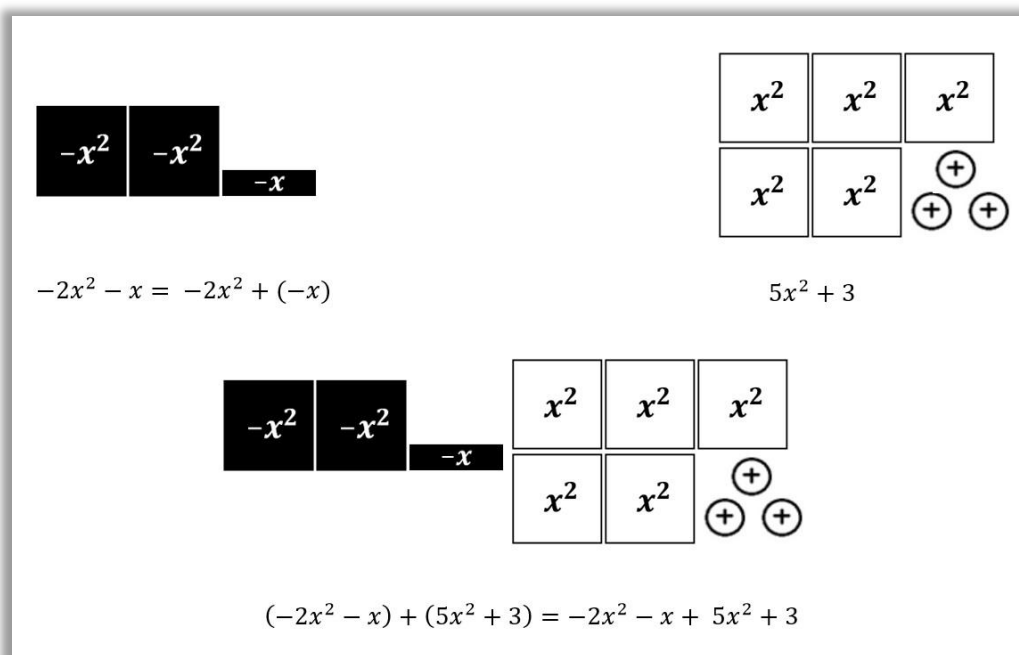
- Teraz chcielibyśmy dodać do siebie takie dwa wyrażenia algebraiczne → Powstaje zapis:

$$(-2x^2 - x) + (5x^2 + 3).$$

Zilustrujmy to na żetonach

{Układamy na żetonach wyrażenia: $-2x^2 - x = -2x^2 + (-x)$ oraz $5x^2 + 3$, a następnie zsuwamy żetony do siebie i wtedy odczytujemy wyrażenie $-2x^2 - x + 5x^2 + 3$ }

Notatka do zeszytu: - taka jak niżej, najpierw bez wykonywania redukcji.



- Czy teraz już potrafilibyście zapisać prościej to wyrażenie algebraiczne?

$$U: \text{Tak: } (-2x^2 - x) + (5x^2 + 3) = -2x^2 - x + 5x^2 + 3$$

Przykład 3)

Nauczyciel zapisuje na tablicy dodawanie dwóch wyrażeń algebraicznych: $x^2 + (-2x - 3)$.

- Teraz chcielibyśmy dodać do siebie takie dwa wyrażenia algebraiczne → Powstaje zapis:
 $x^2 + (-2x - 3)$

Zilustrujmy to na żetonach

{Układamy na żetonach wyrażenia. Korzystamy z tego, że: $-2x - 3 = -2x + (-3)$

Mamy razem: $x^2 + (-2x) + (-3)$.

Jak możemy inaczej zapisać wynik?

$$x^2 - 2x - 3$$

Zauważamy, że

$$x^2 + (-2x - 3) = x^2 - 2x - 3.$$

Praca indywidualna

- Wykonaj działania za pomocą żetonów oraz zapisz wynik w zeszycie.
- $(4x^2 - 3) + x^2 =$
- $(3x + 4x^2) + (x - 5x^2) =$

AKTYWNOŚĆ 3: Wprowadzenie wyrażenia przeciwnego do danego wyrażenia

Dodajmy zatem takie dwa złożone wyrażenia algebraiczne i tym razem obliczmy ile to będzie (modelujemy na żetonach i zapisujemy wynik):

$$(-3x^2 + x) + (3x^2 - x) = -3x^2 + x + 3x^2 - x = 0$$

Jak zatem nazwiemy te dwa złożone wyrażenia algebraiczne: $-3x^2 + x$ i $3x^2 - x$?

WYRAŻENIA DO SIEBIE PRZECIWNE

- Podaj dwa rozbudowane wyrażenia do siebie przeciwne i uzasadnij na żetonach, że rzeczywiście to dobry wybór {uczniowie dodają podane wyrażenia i powinno wyjść 0}

Praca indywidualna (uczniowie wykonują ćwiczenie)

Utwórz wyrażenia przeciwne do:

- $-5x + 3$
- $9x^2 - 8x$
- $4x^2 + 2 - 6$
- $-3x - 7$



AKTYWNOŚĆ 4: Odejmowanie rozbudowanych wyrażeń algebraicznych

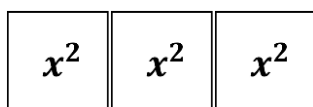
Przykład 1)

Nauczyciel układa za pomocą żetonów na tablicy dwa wyrażenia algebraiczne - po lewej stronie przyklepa żetony: 3 białe kwadratowe, a po prawej stronie 1 biały podłużny i 2 czarne okrągłe. Następnie pyta uczniów jakie wyrażenia zostały przedstawione.

- *Jakie dwa wyrażenia zostały przedstawione na tablicy?*
S: po lewej: $3x^2$, po prawej $x - 2$
- *A jak to zapisać, za pomocą działania, gdybyśmy chcieli od wyrażenia po lewej stronie odjąć wyrażenie po prawej stronie?*
U: $3x^2 - (x - 2)$ {zapisujemy różnicę tych wyrażeń i wyróżniamy kolorem znak odejmowania między nimi}
- *A co byśmy zrobili jakbyśmy chcieli otrzymać wynik tego działania?*
{2 sposoby – akcent położyć na dodanie wyrażenia przeciwnego}

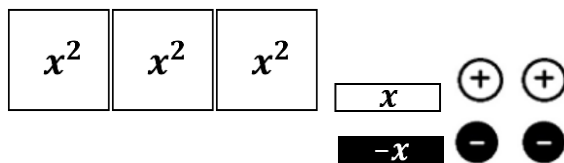
Pierwszy sposób – odejmowanie jako zabieranie

Do 3 białych kwadratowych żetonów dokładamy 1 parę neutralną żetonów podłużnych i 2 pary neutralne żetonów okrągłych.

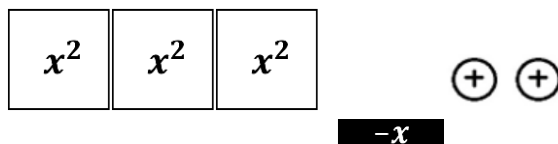


Należy zabrać: x

Aby zabrać 1 biały podłużny żeton oraz 2 czarne okrągłe, musimy je mieć, więc do 3 białych kwadratowych żetonów dokładamy 1 parę neutralną żetonów podłużnych i 2 pary neutralne żetonów okrągłych.



Następnie zabieramy żetony: 1 biały podłużny i 2 czarne okrągłe.



Zostały żetony: 3 białe kwadratowe, 1 czarny podłużny i 2 białe okrągłe. Mamy więc $3x^2 - (x - 2) = 3x^2 - x + 2$



Drugi sposób - dodawanie wyrażenia przeciwnego

$$\text{Czyli } 3x^2 - (x - 2) = 3x^2 + (-x + 2).$$

Przykładowa rozmowa:

- *Co to znaczy ODJĄĆ jakieś wyrażenie? {Ewentualnie dodatkowo: Jakim działaniem można zastąpić odejmowanie?}*
U: dodać wyrażenie przeciwne do tego odejmowanego, czyli $3x^2 - (x - 2) = 3x^2 + (-x + 2)$.
- *Ile zatem (już bez używania nawiasów) wynosi suma tych dwóch wyrażień?*
U: $3x^2 - x + 2$

Notatka w zeszycie ze sposobem zaproponowanym przez uczniów.

Przykład 2)

Nauczyciel zapisuje na tablicy wyrażenie: $(4 - 2x) - (3x - 2) =$.

- *Co my tutaj mamy?*
U: Mamy różnicę dwóch wyrażień algebraicznych
- *Jak to uprościć z użyciem żetonów?*

U: Odjąć to znaczy dodać wyrażenie przeciwne do odejmowanego czyli do pierwszego wyrażenia dokładam żetony: 3 czarne podłużne i 2 białe okrągłe:

$$(4 - 2x) - (3x - 2) = 4 - 2x + (-3x + 2) = 4 - 2x - 3x + 2$$

{Kładziemy akcent na dodanie wyrażenia przeciwnego do odejmowanego – nie robimy już dwóch sposobów.}

Uczniowie zapisują to w zeszycie.

Przykład 3)

Nauczyciel zapisuje na tablicy wyrażenie: $2x - (-4x^2 + 1) =$.

{zwracamy uwagę na to, że odjąć to znaczy dodać wyrażenie przeciwne do odejmowanego czyli do pierwszego wyrażenia dokładam żetony: 4 białe kwadratowe i 1 czarny okrągły:

$$2x - (-4x^2 + 1) = 2x + (4x^2 - 1) = 2x + 4x^2 - 1.}$$

Praca indywidualna

- *Wykonaj działania za pomocą żetonów oraz zapisz wynik w zeszycie.*
- $6 - (-5x^2 + 4) =$
- $(4x^2 - 7x) - (2x^2 + 3x) =$



AKTYWNOŚĆ 5: Gra

Gra – karty:

Opis: Gra 2-, 3- lub 4-osobowa (według uznania nauczyciela). Poniższa instrukcja dotyczy gry między czterema osobami.

Są 4 zestawy kart w różnych kolorach. Każda osoba otrzymuje 1 zestaw kart składający się z 4 kart z działaniami i jednej dodatkowej karty, na której znajdują się odpowiedzi do danego zestawu.

Osoba nr 1 losuje kartę z działaniem od osoby nr 2, osoba nr 2 od osoby nr 3, osoba nr 3 od osoby nr 4, a osoba nr 4 od osoby nr 1. Osoby rozwiązują równocześnie na kartce wylosowane działanie. Za poprawne rozwiązanie każda osoba dostaje 1 punkt. Dodatkowo pierwsza osoba, która poprawnie rozwiąże swoje działanie otrzymuje bonusowy 1 punkt. Grę kontynuujemy w sposób analogiczny do wyczerpania kart. Po każdej rundzie zapisujemy zdobyte punkty w tabeli - np:

LP	Osoba nr 1	Osoba nr 2	Osoba nr 3	Osoba nr 4
Runda 1				
Runda 2				
Runda 3				
Runda 4				

Wygrywa osoba, która zdobędzie największą liczbę punktów.

Zestawy:

Osoba nr 1. (kolor niebieski)

LP	Działanie	Odpowiedź
1.	$4x^2 + (x - 8x^2) =$	$-4x^2 + x$
2.	$(2x - 5) + (6x - 1) =$	$8x - 6$
3.	$3x - (x - 7) =$	$2x + 7$
4.	$(7 + x^2) - (-3x^2 - 1) =$	$4x^2 + 8$



Osoba nr 2. (kolor czerwony)

LP	Działanie	Odpowiedź
1.	$(2x - 5x^2) + 3x^2 =$	$-2x^2 + 2x$
2.	$(-x - 3) + (4 + 6x) =$	$5x + 1$
3.	$7x - (2x - 8) =$	$5x + 8$
4.	$(2x^2 - 6) - (4 + 4x^2) =$	$-2x^2 - 10$

Osoba nr 3. (kolor zielony)

LP	Działanie	Odpowiedź
1.	$2x^2 + (3x - 5x^2) =$	$-3x^2 + 3x$
2.	$(-6 + 4x) + (-6x + 4) =$	$-2x - 2$
3.	$(10x - 10) - 2x =$	$8x - 10$
4.	$(9x^2 + 3) - (x^2 - 2) =$	$8x^2 + 5$

Osoba nr 4. (kolor żółty)

LP	Działanie	Odpowiedź
1.	$(4x - 8x^2) + 5x^2 =$	$-3x^2 + 4x$
2.	$(-2x - 3) + (6 + 6x) =$	$4x + 3$
3.	$(2x - 9) - x =$	$x - 9$
4.	$(4x^2 + 3) - (2 - x^2) =$	$5x^2 + 1$



$3x - (x - 7) =$	$(2x - 5) + (6x - 1) =$	$4x^2 + (x - 8x^2) =$
------------------	-------------------------	-----------------------

Działanie	Odpowiedź
$4x^2 + (x - 8x^2) =$	$-4x^2 + x$
$(2x - 5) + (6x - 1) =$	$8x - 6$
$3x - (x - 7) =$	$2x + 7$
$(7 + x^2) - (-3x^2 - 1) =$	$4x^2 + 8$

$(7 + x^2) - (-3x^2 - 1) =$

AKTYWNOŚĆ 4: ĆWICZENIE UPRASZCZANIA WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH - cd.

Zadanie 1

- a) $6x^2 + (6x - 8x^2) =$
 b) $(4x - 2) + (5x - 3) =$
 c) $(35 + 10x^2) + (21x^2 - 3) =$

Zadanie 2

- a) $x - (14x - 22) =$
 b) $(3x^2 + 1) - (2x^2 - 1) =$

Zadanie 3

- a) $(x + x^2) + (x - 4) - (5 - x^2) =$
 b) $(x^2 + 5x - 6) + (2x^2 - x + 8) =$

Na koniec proponujemy Test sprawdzający wiedzę uczniów:

[Załącznik: B_PL_Test_Wyrazenia algebraiczne]





Imię i Nazwisko.....klasa.....

TEST – WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE**Zadanie 1**

Narysuj na żetonach model podanych wyrażeń algebraicznych.

a) $-2x + (-x^2) + 3$	b) $-x + 2x + x^2 + (-2)$
-----------------------	---------------------------

Zadanie 2

Uprość wyrażenia. Wyjaśnij, jak wykonać poniższe działania. Zilustruj to na odpowiednich rysunkach żetonów.

a) $-6x + (-2x) =$ Wyjaśnienie:	b) $-3x^2 + 5x^2 =$ Wyjaśnienie:
------------------------------------	-------------------------------------

This material is provided by the [AMMA Team](#), responsible institution: Pedagogical University of KrakowUnless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



**Zadanie 3** Uprość wyrażenia. Wyjaśnij, jak wykonać poniższe działania. Zilustruj to na odpowiednich rysunkach żetonów.

a) $-4x^2 - (-4x^2) =$

Wyjaśnienie:

b) $3x - 7x =$

Wyjaśnienie:

Zadanie 4Wyrażeniem przeciwnym do $-4x^2 + 5$ jest wyrażenie:Przedstaw model wyrażenia przeciwnego do: $-4x^2 + 5$ z wykorzystaniem żetonów:**Zadanie 5** Uprość wyrażenia. Uzasadnij swój wynik wykonując odpowiednie rysunki żetonów.

a) $1 - (-4x^2 + 5) =$

b) $-3x^2 + (-4x) - x + 3 + x^2 =$

This material is provided by the [AMMA Team](#), responsible institution: Pedagogical University of KrakowUnless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Na koniec proponujemy Ankiętę:

[Załącznik: B_PL_Kwestionariusz Końcowy]

The screenshot shows a survey form with the following content:

- Header: AMMA logo, "Projekt współfinansowany w ramach programu Unii Europejskiej Erasmus+", and the European Union flag.
- Title: ANKIETA – WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE
- Question 1: "W jakim stopniu metoda z żetonami pomogła Ci w zrozumieniu i wykonywaniu działań na wyrażeniach algebraicznych? Zaznacz jedną odpowiedź w skali od 1 do 5 (gdzie 1 – oznacza, że w ogóle Ci nie pomogła, a 5 – że jest bardzo użyteczna)." Below the question are five circles labeled 1 to 5. Under circle 1 is the text "W ogóle mi nie pomogła" and under circle 5 is "Jest bardzo użyteczna".
- Question 2: "Czy metoda z żetonami podobała Ci się? (zakreśl odpowiedź)" with options "NIE / NIE WIEM / TAK".
- Question 3: "Co Ci się podobało na lekcjach z wykorzystaniem żetonów?" followed by a dotted line for writing.
- Question 4: "Co Ci się nie podobało na lekcjach z wykorzystaniem żetonów? Co należałoby, według Ciebie, zmienić?" followed by a dotted line for writing.
- Question 5: "Co uważasz na temat lekcji z żetonami? Zapisz pozostałe spostrzeżenia." followed by a dotted line for writing.
- Footer: "This material is provided by the AMMA Team, responsible institution: Pedagogical University of Krakow", Creative Commons license icons (CC BY-NC-SA 4.0), and a disclaimer: "The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein."

ANKIETA – WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. W jakim stopniu metoda z żetonami pomogła Ci w zrozumieniu i wykonywaniu działań na wyrażeniach algebraicznych? Zaznacz jedną odpowiedź w skali od 1 do 5 (gdzie 1 – oznacza, że w ogóle Ci nie pomogła, a 5 – że jest bardzo użyteczna).

1 2 3 4 5

W ogóle mi
nie pomogła

Jest bardzo
użyteczna

2. Czy metoda z żetonami podobała Ci się? (zakreśl odpowiedź)
NIE / NIE WIEM / TAK
3. Co Ci się podobało na lekcjach z wykorzystaniem żetonów?
4. Co Ci się nie podobało na lekcjach z wykorzystaniem żetonów? Co należałoby, według Ciebie, zmienić?
5. Co uważasz na temat lekcji z żetonami? Zapisz pozostałe spostrzeżenia.

str. 12

This material is provided by the [AMMA Team](#), responsible institution: Pedagogical University of Krakow



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.