

Príručka pre učiteľa

Opis vyučovacieho cyklu

Názov série lekcíí	Algebraické výrazy, ich sčítanie a odčítanie pomocou žetónov
Čas trvania	<i>5 – 8 vyučovacích hodín (v závislosti od tempa a úrovne učenia sa žiakov)</i>
Trieda/vek	<p><i>8. trieda základných škôl (15 rokov);</i></p> <p><i>1. trieda strednej školy (pre žiakov s ťažkosťami v učení sa matematiky)</i></p>
Cieľ vyučovacieho cyklu a jeho stručný opis	<p><i>Cieľom tejto metodiky je vytvoriť predstavu o algebraickom výraze a opačnom výraze, ako aj o sčítaní a odčítaní takýchto výrazov pomocou žetónov.</i></p> <p><i>Metodiku možno použiť v mladších ročníkoch ako úvod do algebraických výrazov, aj na opakovacích hodinách so žiakmi vo vyšších ročníkoch.</i></p> <p><i>Pri hre s konkrétnym modelom (žetónmi) si žiaci vytvárajú predstavu o algebraickom výraze a k nemu opačnom výraze a rozvíjajú chápanie činnosti sčítania ako pridávania žetónov a odčítania ako odoberania žetónov.</i></p> <p><i>Týmto spôsobom žiaci vykonávajú matematické modelovanie.</i></p>
Výučbové pomôcky	<i>Každý žiak dostane a manipuluje s 10 žetónmi každej farby (biela/čierna) a každého tvaru (okrúhly/obdĺžnikový/štvorcový), spolu 60 žetónov.</i>

Lingvistická poznámka pre prácu s celými číslami a algebraickými výrazmi pomocou žetónov:

V našich scenároch dbáme na vedomé jazykové oddelenie dvoch svetov - sveta matematiky, t.j. abstrakcií, a sveta reálnych objektov - v našom prípade žetónov. Preto v kontexte žetónov používame výrazy, ktoré opisujú ich vzhľad: biely/čierny okrúhly/obdĺžnikový alebo podlhovastý/štvorcový žetón, a nepoužívame skrátený tvar biely/čierny kruh/obdĺžnik/štvorec. Podobne v kontexte žetónov hovoríme o pridávaní a odoberaní žetónov - a v kontexte matematiky hovoríme o operáciách sčítania a odčítania. Taktiež dbáme na to, aby sme slovné čítali znaky činnosti ako sčítanie/odčítanie, a nie len názov znaku plus/mínus. Sme presvedčení, že modelovanie aritmetických a algebraických výrazov s ohľadom na zrozumiteľnosť a jazykovú správnosť má veľkú hodnotu a odporúčame to dodržiavať.

ČASŤ 3



Časť 3

Téma: Odčítanie algebraických výrazov pomocou žetónov

AKTIVITA 1: Úvod do odčítania

- Akým spôsobom opíšete situáciu:

- o Mám 5 bielych obdĺžnikových žetónov

x	x	x	x	x
-----	-----	-----	-----	-----

 a odoberiem z nich 3

x	x	x
-----	-----	-----

.

- Koľko ich ostane?

Ž: Zostali dva biele obdĺžnikové žetóny.

- Ako zapíšeme túto situáciu?

Žiaci píšú: $5x - 3x = 2x$

- o Mám 6 čiernych štvorcových žetónov

$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$
--------	--------	--------	--------	--------

$-x^2$

$-x^2$

a jeden takýto žetón odoberiem . Koľko mi ich zostáva? Ako to zapíšeme?

Žiaci zapisujú: $-6x^2 - (-x^2) = -5x^2$

DOHODA: ODOBRAŤ ZNAMENÁ ODČITAŤ

AKTIVITA 2: Cvičenie na odčítanie (bez pridávania neutrálnych dvojíc)

Spoločná práca. Diskusia.

- o Napr. $6x - 4x$. Čo by to znamenalo pomocou žetónov? (Napište príklad na tabuľu s ukážkou pomocou žetónov (na tabuli).

(Žiaci modelujú, činnosť sa vykonáva na tabuli – odstraňovanie žetónov:

Mám 6 bielych obdĺžnikových žetónov, odoberiem 4 biele obdĺžnikové žetóny, takže mi zostanú 2 biele obdĺžnikové žetóny).

- o A ako by vyzeral pomocou žetónov príklad $(-5x^2) - (-3x^2)$?

(Žiaci modelujú, činnosť sa vykonáva na tabuli – odstraňovanie žetónov:

Mám 5 čiernych štvorcových žetónov, odoberiem 3 čierne štvorcové žetóny, takže mi zostanú 2 čierne štvorcové žetóny).

Samostatná práca, ale zhrnutá s vyjadreniami žiakov a poznámkou.

- Vypočítajte príklad pomocou žetónov a zdôvodnite výsledok.

- $-4x - (-x) = \dots$

Žiaci usporiadajú model. Potom vysvetlia postup pomocou žetónov:

- Ž: *Mám 4 čierne obdĺžnikové žetóny a odoberiem 1 čierny obdĺžnikový žetón, takže mi zostanú 3 čierne obdĺžnikové žetóny.*

(Žiaci prečiarknu jeden žetón. Zápis sa objaví na tabuli)



- Aktivitu si zapíšete do zošita a pomocou žetónov zdôvodnite výsledok.

- $-2x - (-2x) =$
- $-7x^2 - (-3x^2) =$

AKTIVITA 3: Modelovanie odčítania dvoma spôsobmi (pridanie rôznych počtov neutrálnych dvojíc)

Spoločná práca. Dialóg.

Žiakom kladieme otázku:

- *Ako znázorniť príklad $3x^2 - 6x^2$ pomocou žetónov? Videli sme už niekde niečo podobné? (Učiteľ napíše príklad na tabuľu)*

Kladením ďalších otázok sa snažíme získať odpoveď, že podobná situácia bola so zápornými číslami a okrúhlymi žetónmi v situácii, keď sme mali odobrať žetóny, ktoré tam neboli.

Možné otázky:

- *Máme si vziať šesť bielych štvorcových žetónov a máme len tri biele štvorcové žetóny. Ako sa to dá urobiť?*

Žiaci by mali po skúsenostiach s celými číslami vymyslieť prídanie neutrálnych dvojíc. Ak nevymyslia nič – kladieme ďalšie otázky o tom, aké pravidlá máme v našej hre so žetónmi a ako sme to robili so zápornými číslami, keď sme mali málo žetónov.

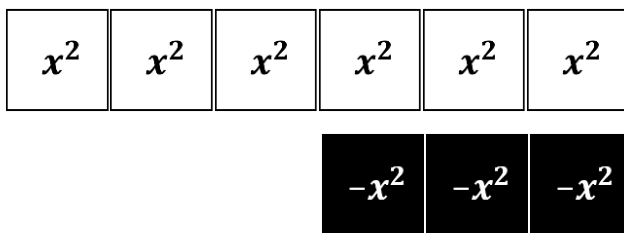
- *Koľko neutrálnych dvojíc v podobe štvorcových žetónov môžeme pridať?*

Mala by sa objaviť niektorá z nasledujúcich možností. Po tom, čo sa jedna z nich objaví (a je prediskutovaná), sa spýtame, ako sa to dá urobiť inak, a prediskutujeme ďalší spôsob

Prvý spôsob

Odôvodnenie:

Keďže musíme odobrať 6 bielych štvorcových žetónov, musíme ich mať, takže pridáme 3 páry neutrálnych dvojíc:



Ak teraz odoberieme 6 bielych štvorcových žetónov, dostaneme hneď výsledok:

$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$
--------	--------	--------

 , t. j. $-3x^2$.

Druhý spôsob

Môžem postupovať rovnako ako pri okrúhlych žetónoch: aby sme mohli odobrať nejaké žetóny, najprv sme ich museli pridať v podobe neutrálnych dvojíc, ako teda postupujeme tu? Rovno pridáme 6 neutrálnych dvojíc, pretože musíme vziať 6 bielych štvorcových žetónov.

Potom tu máme:

x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Ak teraz odstránime 6 bielych štvorcových žetónov, dostaneme rovnaký výsledok ako v prípade

$$3x^2 + (-6x^2):$$

x^2	x^2	x^2
-------	-------	-------

$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$	$-x^2$
--------	--------	--------	--------	--------	--------

To znamená, že $3x^2 - 6x^2 = 3x^2 + (-6x^2)$. Ďalej už vieme, ako na to. (Teraz potrebujeme namodelovať druhú činnosť – sčítanie.)

Poznámka

- Príklady s výsledkom si zapíšete do zošita a nakreslite zdôvodnenie výsledku pomocou žetónov.

AKTIVITA 4: Odčítanie – problémová situácia s pridaním neutrálnych dvojíc a opätovné uvedenie si žiakov, že odčítanie možno nahradiť pripočítaním opačného výrazu

Spoločná práca. Dialóg.

- $2x - (-x)$

Žiakom kladieme otázku:



- Ako znázorniť príklad $2x - (-x)$ pomocou žetónov? Videli sme už niekde niečo podobné? (Učiteľ napíše príklad na tabuľu)

Kladením ďalších otázok sa snažíme získať odpoveď, že podobná situácia bola so zápornými číslami a okrúhlymi žetónmi v situácii, keď sme mali odobrať žetóny, ktoré tam neboli.

- Máme si vziať jeden čierny obdĺžnikový žetón, takže ho musíme mať. Pridáme žetóny: jeden biely obdĺžnikový žetón a jeden čierny obdĺžnikový žetón – takto si budeme môcť vziať jeden čierny obdĺžnikový žetón. Tým nám zostanú tri biele obdĺžnikové žetóny, t. j. $3x$.

- Ako sa to dá urobiť inak? Čo už vieme o odčítaní?

- Ž: Môžeme zapísať $2x - (-x) = 2x + x$

- Odôvodnite pomocou žetónov, že výsledok bude rovnaký.

*) Poznámka:

Ak by žiaci povedali, že odčítanie jedného čierneho obdĺžnikového žetónu znamená pridanie jedného bieleho obdĺžnikového žetónu, povieme, že je to veľmi dobrý nápad, a požiadame ich, aby to zdôvodnili pomocou žetónov, $2x - (-x) = 2x + x$. Žiaci pomocou žetónov ukážu, že keď k $2x$ pridáme x výsledok bude rovnaký ako pri odobraní s pridaním neutrálnej dvojice.

Spoločná práca – pokračovanie.

- $-2x - (-3x)$

- Ako znázorniť príklad $-2x - (-3x)$ pomocou žetónov? (Videli sme už niekde niečo podobné?) (Učiteľ napíše príklad na tabuľu)

(Pri čítaní si všimnite slovo odobrať: "od mínus dva x ODOBERIEM mínus tri x")

- Aké žetóny máme k dispozícii? Koľko ich je?

Ž: Máme 2 čierne obdĺžnikové žetóny.

- Čo máme urobiť?

Ž: Odobrať 3 čierne obdĺžnikové žetóny.

- Ako na to?

Učiteľ počúva nápady žiakov a sleduje spôsob, akým ich žiaci vyslovujú – môže sa objaviť myšlienka opísaná nižšie **Prvým spôsobom** alebo **Druhým spôsobom**.

Poznámka: Ak sa neobjavia žiadne nápady, učiteľ môže v kladení otázok pokračovať:

- Ako si môžeme vziať 3 čierne, keď máme len 2 čierne?

- Čo robiť, aby ste mali ďalší čierny obdĺžnikový žetón?

Tieto otázky sú návodom na **prvý spôsob**.



Prvý spôsob

$$\begin{array}{ccc} -x & -x & -x \\ & & x \end{array}$$

Ak teraz odoberieme 3 čierne obdĺžnikové žetóny, výsledok je okamžite: x , t. j. x .

Druhý spôsob vedie k objaveniu vzťahu $-2x - (-3x) = -2x + 3x$ a my už vieme, ako pridať neutrálne dvojice:

Druhý spôsob

Môžem postupovať ako v predchádzajúcich príkladoch: aby sme mohli zobrať nejaké žetóny, najprv sme ich museli pridať v podobe neutrálnych dvojíc. Pridáme 3 neutrálne dvojice, pretože máme odobrať 3 čierne obdĺžnikové žetóny.

Potom tu máme:

$$\begin{array}{ccccc} -x & -x & -x & -x & -x \\ & & x & x & x \end{array}$$

Ak teraz odstránime 3 čierne obdĺžnikové žetóny, dostaneme rovnaký výsledok ako $-2x + 3x$:

$$\begin{array}{cc} -x & -x \\ & x & x & x \end{array}$$

To znamená, že $-2x - (-3x) = -2x + 3x$. Ďalej už vieme, ako na to. (Teraz potrebujeme namodelovať druhú činnosť, ktorou je sčítanie).

Takže si to zhrňme:

Čo robiť, ak chcete odčítať výraz? → nahradiť toto odčítanie pripočítaním opačného výrazu.

AKTIVITA 5: Modelovanie odčítania dvoma spôsobmi – zdôvodnenie odčítania ako pripočítanie opačného výrazu – cvičenia

Samostatná práca:

- Zdôvodnite, prosím, pomocou žetónov daný príklad. Napíšte príklad s výsledkom do zošita a nakreslite zdôvodnenie výsledku pomocou žetónov:

- $2x^2 - (-3x^2) =$
- $-4x^2 - (-6x^2) =$

AKTIVITA 6: Hra - cvičenie na odčítanie

 Quizizz :https://quizizz.com/admin/quiz/63d942303aa411001ef9321b?source=quiz_share

	Otázka	Odpovede			
1.	$4x^2 - x^2 =$	$3x^2$	$-3x^2$	$3x$	$-3x$
2.	$-3x - (-2x) =$	$-x$	x	$-5x$	$5x$
3.	$7x - 9x =$	$-2x$	$2x$	2	-2
4.	$5x^2 - (-2x^2) =$	$7x^2$	$-7x^2$	$-3x^2$	$3x^2$
5.	$-x^2 - (-9x^2) =$	$8x^2$	$-8x^2$	$10x^2$	$-10x^2$
6.	$7x - (-1) - (-2x) - 1 =$	$9x$	$9x - 2$	$5x - 2$	$5x$
7.	$3x - 3x^2 - (-3x) - (-3x^2) =$	$6x$	$-6x$	0	$6x^2$



AKTIVITA 7: Cvičenie - zjednodušovanie algebraických výrazov

Spoločná práca - žiaci si jednotlivito rozmiestnia žetóny na lavice a potom jeden z nich prezentuje výsledky pri tabuli.

Pýtame sa:

- Usporiadal to niekto inak? Čo ste si všimli? Snažíme sa, aby si žiaci všimli neutrálne dvojice vo vyjadreniach.

	Daný algebraický výraz	Možný model(y)
1.	$2x^2 + (-1) + 3x + (-3) =$	<p>Initial model: Two x^2 tiles, one x tile, three $-x$ tiles, one -1 tile, and three -1 tiles.</p> <p>→</p> <p>Simplified model: Two x^2 tiles, three x tiles, and four -1 tiles.</p>
2.	$2x + 3 - 6x - 10 =$ <i>(Čo znamená odčítať 6x? Čo sme práve povedali? Ž: že toto odčítanie môžeme nahradiť pripočítaním (-6x), t. j. pridajte 6 čiernych obdĺžnikových žetónov a 10 čiernych okrúhlych žetónov).</i> Zapišeme ekvivalenciu: $2x + 3 - 6x - 10$ $= 2x + 3 + (-6x) + (-10)$	<p>Initial model: Two x tiles, three $+1$ tiles, six $-x$ tiles, and ten -1 tiles.</p> <p>→</p> <p>Simplified model: Two x tiles, three $+1$ tiles, six $-x$ tiles, and ten -1 tiles. Red lines indicate the cancellation of four x tiles and seven $+1$ tiles.</p>



3.	$2x^2 - 6 - x^2 - (-3) =$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">x^2</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">x^2</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ </div> <div style="border: 1px solid black; background-color: black; color: white; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">$-x^2$</div> <p>→</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">x^2</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">x^2</div> </div> <div style="border: 1px solid black; background-color: black; color: white; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">$-x^2$</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> ⊖ ⊖ ⊖ </div>
----	---------------------------	---

Samostatná práca:

- Znázornite daný výraz pomocou žetónov. Zjednodušte ho a zdôvodnite, ako ste to urobili. Nezabudnite urobiť náčrt do zošita.

- $x^2 + (-x) - 2x + 5 =$

