

Przewodnik Nauczyciela

Opis cyklu lekcji

Tytuł cyklu lekcji	Wyrażenia algebraiczne, ich dodawanie i odejmowanie z wykorzystaniem żetonów
Czas trwania	<i>5-8 godzin lekcyjnych (w zależności od tempa pracy uczniów i poziomu nauczania)</i>
Klasa/Wiek	<i>Klasy 6-8 szkoły podstawowej (12-15 lat); Klasa I szkoły ponadpodstawowej (dla uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki)</i>
Cel cyklu lekcji i jego krótki opis	<i>Celem tego cyklu lekcji jest kształtowanie pojęcia wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz dodawania i odejmowania takich wyrażen z wykorzystaniem żetonów. Scenariusz może być wykorzystany zarówno w młodszych klasach jako wprowadzenie wyrażen algebraicznych, jak i na lekcjach powtórzeniowych z uczniami w starszych klasach. Uczniowie w trakcie zabawy z modelem konkretnym (żetonami) budują pojęcie wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz wypracowują rozumienie działania dodawania jako dokładania żetonów i odejmowania jako zabierania żetonów. Dzięki temu uczniowie podejmują się modelowania matematycznego.</i>
Pomoce naukowe	<i>Każdy uczeń ma do dyspozycji i manipulacji po 10 żetonów każdego koloru (biały/czarny) i każdego kształtu (okrągły/podłużny/kwadratowy), łącznie zestaw 60 żetonów.</i>

Uwaga językowa do pracy z żetonami w zakresie liczb całkowitych i wyrażen algebraicznych:

W naszych scenariuszach zwracamy uwagę na to, by świadomie rozdzielić językowo dwa światy – świat matematyki, czyli abstrakcji i świat przedmiotów rzeczywistych – w naszym przypadku żetonów. Dlatego w kontekście żetonów używamy terminów opisujących jego wygląd: biały/czarny żeton okrągły/podłużny/kwadratowy a nie używamy krótkiej formy białe/czarne koło/prostokąt/kwadrat. Podobnie w kontekście żetonów mówimy o dokładaniu i zabieraniu żetonów – a w kontekście matematyki o działaniach dodawania i odejmowania. Zwracamy również uwagę na to, by znaki działań czytać słownie jako dodać/odjąć, a nie tylko czytając nazwę znaku plus/minus. Jesteśmy przekonani, że modelowanie wyrażen arytmetycznych i algebraicznych z dbałością o czystość i poprawność językową jest dużą wartością i ją rekomendujemy.

CZĘŚĆ 3



Część 3

Temat: Odejmowanie wyrażeń algebraicznych na żetonach

AKTYWNOŚĆ 1: Wprowadzenie do odejmowania

Jakim działaniem opiszemy sytuację:

- o Mam 5 białych podłużnych żetonów

x	x	x	x	x
---	---	---	---	---

 i zabieram 3 takie żetony

x	x	x
---	---	---

.

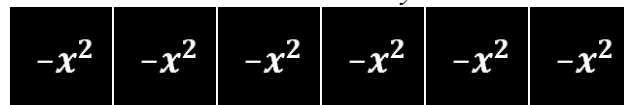
- Ile mi zostało?

U: Zostały dwa białe żetony podłużne.

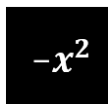
- Jakim działaniem zapiszemy tę sytuację?

Uczniowie opisują: $5x - 3x = 2x$

- o Mam 6 czarnych kwadratowych żetonów



i zabieram jeden taki żeton



- Ile mi zostało? Jak to zapiszemy?

Uczniowie opisują: $-6x^2 - (-x^2) = -5x^2$

UMOWA: ZABRAĆ oznacza ODJAĆ

AKTYWNOŚĆ 2: Ćwiczenie odejmowania (bez dokładania par neutralnych)

Praca wspólna. Pogadanka.

- o Np. $6x - 4x$. Co to by oznaczało na żetonach? (zapis działania na tablicy wraz z pokazem na żetonach (na tablicy))

(uczniowie modelują, aktywność wykonana na tablicy – zdejmowanie żetonów:

mam 6 białych podłużnych żetonów zabieram 4 białe podłużne, więc zostały mi 2 białe podłużne.)

- o A jak na żetonach wyglądałoby działanie $(-5x^2) - (-3x^2)$?

(uczniowie modelują, aktywność wykonana na tablicy – zdejmowanie żetonów:

mam 5 czarnych kwadratowych żetonów, zabieram 3 czarne kwadratowe, więc zostały mi 2 czarne kwadratowe.)

Praca indywidualna, ale podsumowana wypowiedziami ucznia i notatką:

- Proszę przedstawić na żetonach działanie i uzasadnić jego wynik.

- o $-4x - (-x) = \dots\dots$



Uczniowie układają model. Następnie wypowiadają interpretację działania na modelu:

- U: mam 4 czarne podłużne żetony i zabieram 1 czarny podłużny, więc zostają mi 3 czarne podłużne.

(Uczniowie w notatce skreślają „zabrany” żeton. Zapis pojawia się na tablicy)



- Proszę zapisać działanie w zeszycie i narysować uzasadnienie wyniku na żetonach.

- $-2x - (-2x) =$
- $-7x^2 - (-3x^2) =$

AKTYWNOŚĆ 3: Modelowanie odejmowania na dwa sposoby (dokładanie różnej liczby par neutralnych)

Praca wspólna. Pogadanka

Stawiamy uczniom pytanie:

- - Jak przedstawić działanie $3x^2 - 6x^2$ na żetonach? Czy gdzieś już kiedyś mieliśmy podobną sytuację? (Nauczyciel zapisuje działanie na tablicy)

Zadając kolejne pytania dążymy do tego, aby uzyskać odpowiedź, że podobna sytuacja była z liczbami ujemnymi i żetonami okrągłymi, gdy mieliśmy zabrać żetony, których nie było. Ewentualne pytania:

- Mamy zabrać sześć białych kwadratowych żetonów, a mamy tylko trzy białe kwadratowe, zatem jak można to zrobić?

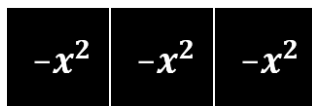
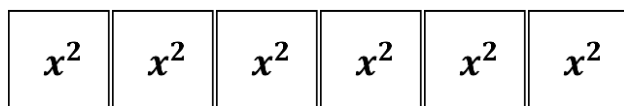
Uczniowie po doświadczeniach z liczbami całkowitymi powinni wymyślić dołożenie par neutralnych. Jeśli nie wymyślą – zadajemy kolejne pytania o to, jakie mamy umowy w naszej grze dydaktycznej i jak to robiliśmy z liczbami ujemnymi, gdy brakowało nam żetonów.

- Ile par neutralnych w postaci żetonów kwadratowych możemy dołożyć.

Powinien się pojawić któryś z poniższych sposobów. Po pojawieniu się jednego (i omówieniu) pytamy o to, jak to można zrobić inaczej i omawiamy kolejny sposób.

Pierwszy sposób

Rozumowanie: Skoro mamy zabrać 6 białych kwadratowych żetonów to musimy je mieć, zatem dokładamy 3 pary neutralne:



Jak teraz zabierzemy 6 białych kwadratowych żetonów, to otrzymamy od razu wynik:

, czyli $-3x^2$.

Drugi sposób

Mogę zrobić jak robiliśmy przy żetonach okrągłych: aby zabrać jakieś żetony, najpierw je sobie dokładaliśmy w postaci par neutralnych, czyli jak tutaj zrobimy? Od razu dołożymy 6 par neutralnych, bo mamy zabrać 6 białych kwadratowych żetonów.

Wówczas mamy:

Jak teraz zabierzemy 6 białych kwadratowych żetonów, to otrzymamy taki sam wynik, jak $3x^2 + (-6x^2)$:

Czyli $3x^2 - 6x^2 = 3x^2 + (-6x^2)$. Dalej już umiemy zrobić. (Ale trzeba teraz modelować drugie działanie – dodawanie.)

Notatka:

- Proszę zapisać oba działania wraz z wynikiem w zeszytcie i uzasadnić ilustrując na rysunku, jak z odpowiednich żetonów powstał wynik.

AKTYWNOŚĆ 4: Odejmowanie – sytuacja problemowa z dokładaniem neutralnych par i ponownym uświadomieniem uczniom, że odejmowanie można zastąpić dodawaniem wyrażenia przeciwnego

Praca wspólna. Pogadanka

- $2x - (-x)$

Stawiamy uczniom pytanie:



- Jak przedstawić działanie $2x - (-x)$ na żetonach? Czy gdzieś już kiedyś widzieliśmy coś podobnego? (N. zapisuje działanie na tablicy)

Zadając kolejne pytania dążymy do tego, aby uzyskać odpowiedź, że podobna sytuacja była z liczbami ujemnymi i żetonami okrągłymi, w sytuacji, gdy mieliśmy zabrać żetony, których nie było.

- Mamy zabrać jeden czarny podłużny żeton, zatem muszę go mieć. Dokładamy żetony: jeden biały podłużny i jeden czarny podłużny – w ten sposób będziemy mogli zabrać jeden czarny podłużny. Zostaną trzy białe podłużne, czyli w wyniku $3x$.

- Jak to można zrobić inaczej? Co już wiemy o odejmowaniu?

-U: Można $2x - (-x) = 2x + x$

- Uzasadnicie na żetonach, że wynik będzie ten sam.

*) Uwaga:

Gdyby uczniowie powiedzieli, że odjąć jeden czarny podłużny żeton oznacza dołożyć jeden biały podłużny żeton, to mówimy, że to bardzo dobra uwaga i prosimy o uzasadnienie na żetonach, że $2x - (-x) = 2x + x$. Uczniowie pokazują na żetonach, że jak do $2x$ dodamy x to wynik będzie ten sam, co przy zabieraniu z dołożeniem pary neutralnej.

Praca wspólna – c.d.

- $-2x - (-3x)$

- Jak przedstawić działanie $-2x - (-3x)$ na żetonach? (Czy gdzieś już kiedyś widzieliśmy coś podobnego?) (Nauczyciel. zapisuje działanie na tablicy)

(Przy czytaniu zwracamy uwagę na słowo odjąć: „minus dwa x ODJĄĆ minus trzy x ”)

- Jakie mamy żetony? Ile ich jest?

U: Mamy 2 czarne podłużne żetony.

- Co mamy zrobić?

U: Zabrać 3 czarne podłużne żetony.

- Jak to zrobić?

Nauczyciel słucha pomysłów uczniów i podąża za wypowiedzianym przez uczniów sposobem – może się pojawić pomysł opisany poniżej w **Pierwszym sposobie** lub w **Drugim sposobie**.

Uwaga: Jeśli nie pojawią się żadne pomysły, nauczyciel może kontynuować zadawanie pytań na przykład tak:

- Jak zabrać 3 czarne, skoro mamy tylko 2 czarne?

- Co zrobić, by mieć jeszcze jeden czarny podłużny żeton?

Te pytania naprowadzają na **Pierwszy sposób**.



Pierwszy sposób

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -x & -x & -x \\ \hline & & x \\ \hline \end{array}$$

Jak teraz zabierzemy 3 czarne podłużne żetony, to otrzymamy od razu wynik: x , czyli x .

Możliwy jest drugi sposób prowadzący do odkrycia zasady $-2x - (-3x) = -2x + 3x$, a dodawać już umiemy:

Drugi sposób

Mogę zrobić jak w poprzednich przykładach: aby zabrać jakieś żetony, najpierw je sobie dokładaliśmy w postaci par neutralnych, czyli jak tutaj zrobimy? Od razu dołożymy 3 pary neutralne, bo mam zabrać 3 czarne podłużne żetony.

Wówczas mamy:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -x & -x & -x & -x & -x \\ \hline & x & x & x & \\ \hline \end{array}$$

Jak teraz zabierzemy 3 czarne podłużne żetony, to otrzymamy taki sam wynik, jak $-2x + 3x$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -x & -x \\ \hline & x & x & x \\ \hline \end{array}$$

Czyli $-2x - (-3x) = -2x + 3x$. Dalej już umiemy zrobić. (Ale trzeba teraz modelować drugie działanie, czyli dodawanie)

Podsumujmy więc:

Co zrobić aby odjąć jakieś wyrażenie? → zastąpić to odejmowanie dodawaniem wyrażenia przeciwnego.

AKTYWNOŚĆ 5: Modelowanie odejmowania na dwa sposoby – uzasadnianie odejmowania jako dodawanie wyrażenia przeciwnego - ćwiczenia

Praca indywidualna:

- Proszę uzasadnić na żetonach podane działanie. Proszę zapisać działanie wraz z wynikiem w zeszycie i narysować uzasadnienie wyniku na żetonach:

- $2x^2 - (-3x^2) =$
- $-4x^2 - (-6x^2) =$



AKTYWNOŚĆ 6: Gra - ćwiczenie odejmowania

 Quizizz: https://quizizz.com/admin/quiz/63d942303aa411001ef9321b?source=quiz_share


LP	Pytanie	Odpowiedzi			
1.	$4x^2 - x^2 =$	$3x^2$	$-3x^2$	$3x$	$-3x$
2.	$-3x - (-2x) =$	$-x$	x	$-5x$	$5x$
3.	$7x - 9x =$	$-2x$	$2x$	2	-2
4.	$5x^2 - (-2x^2) =$	$7x^2$	$-7x^2$	$-3x^2$	$3x^2$
5.	$-x^2 - (-9x^2) =$	$8x^2$	$-8x^2$	$10x^2$	$-10x^2$
6.	$7x - (-1) - (-2x) - 1 =$	$9x$	$9x - 2$	$5x - 2$	$5x$
7.	$3x - 3x^2 - (-3x) - (-3x^2) =$	$6x$	$-6x$	0	$6x^2$

str. 7

 This material is provided by the [AMMA Team](#), responsible institution: Pedagogical University of Krakow

 Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

AKTYWNOŚĆ 7: Ćwiczenie - upraszczanie wyrażeń algebraicznych

Praca wspólna - uczniowie indywidualnie układają żetony na ławkach, a potem jedna osoba prezentuje je na tablicy.

Pytamy:

- Czy ktoś ułożył to inaczej? Co zauważamy? Dążymy, aby uczniowie zauważyli w wyrażeniach pary neutralne.

LP	Zadane wyrażenie algebraiczne	Możliwe model(e)
1.	$2x^2 + (-1) + 3x + (-3) =$	<p>Diagram showing two boxes labeled x^2, three boxes labeled x, and four circles labeled $-$.</p>
2.	$2x + 3 - 6x - 10 =$ <i>(Co to znaczy odjąć $6x$? Co przed chwilą powiedzieliśmy? U: że to odejmowanie możemy zastąpić dodawaniem $(-6x)$ czyli dołożymy 6 czarnych podłużnych oraz 10 czarnych okrągłych żetonów.)</i> Zapisujemy równoważnie: $2x + 3 - 6x - 10$ $= 2x + 3 + (-6x) + (-10)$	<p>Diagram showing two boxes labeled x, three circles labeled $+$, six black bars labeled $-x$, and ten black circles labeled $-$.</p>

3.	$2x^2 - 6 - x^2 - (-3) =$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">x^2</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">x^2</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: center; margin-bottom: 10px;"> - - - - - - </div> <div style="background-color: black; color: white; padding: 10px; margin-bottom: 10px; display: inline-block;">$-x^2$</div> <p style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">→</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">x^2</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">x^2</div> </div> <div style="background-color: black; color: white; padding: 10px; margin-bottom: 10px; display: inline-block;">$-x^2$</div> <div style="display: flex; justify-content: center; margin-bottom: 10px;"> - - - </div>
----	---------------------------	--

Praca indywidualna:

- Proszę przedstawić na żetonach podane wyrażenie. Uprość je i uzasadnij jak to zrobić. Pamiętaj o wykonaniu rysunku.

- $x^2 + (-x) - 2x + 5 =$

