

Príručka pre učiteľa

Opis vyučovacieho cyklu

Názov série lekcíí	Algebraické výrazy, ich sčítanie a odčítanie pomocou žetónov
Čas trvania	<i>5 – 8 vyučovacích hodín (v závislosti od tempa a úrovne učenia sa žiakov)</i>
Trieda/vek	<i>8. trieda základných škôl (15 rokov); 1. trieda strednej školy (pre žiakov s ťažkosťami v učení sa matematiky)</i>
Cieľ vyučovacieho cyklu a jeho stručný opis	<i>Cieľom tejto metodiky je vytvoriť predstavu o algebraickom výraze a opačnom výraze, ako aj o sčítaní a odčítaní takýchto výrazov pomocou žetónov. Metodiku možno použiť v mladších ročníkoch ako úvod do algebraických výrazov, aj na opakovacích hodinách so žiakmi vo vyšších ročníkoch. Pri hre s konkrétnym modelom (žetónmi) si žiaci vytvárajú predstavu o algebraickom výraze a k nemu opačnom výraze a rozvíjajú chápanie činnosti sčítania ako pridávania žetónov a odčítania ako odoberania žetónov. Týmto spôsobom žiaci vykonávajú matematické modelovanie.</i>
Výučbové pomôcky	<i>Každý žiak dostane a manipuluje s 10 žetónmi každej farby (biela/čierna) a každého tvaru (okrúhly/obdĺžnikový/štvorcový), spolu 60 žetónov.</i>

Lingvistická poznámka pre prácu s celými číslami a algebraickými výrazmi pomocou žetónov:

V našich scenároch dbáme na vedomé jazykové oddelenie dvoch svetov - sveta matematiky, t.j. abstrakcií, a sveta reálnych objektov - v našom prípade žetónov. Preto v kontexte žetónov používame výrazy, ktoré opisujú ich vzhľad: biely/čierny okrúhly/obdĺžnikový alebo podlhovastý/štvorcový žetón, a nepoužívame skrátený tvar biely/čierny kruh/obdĺžnik/štvorec. Podobne v kontexte žetónov hovoríme o pridávaní a odoberaní žetónov - a v kontexte matematiky hovoríme o operáciách sčítania a odčítania. Taktiež dbáme na to, aby sme slovné čítali znaky činnosti ako sčítanie/odčítanie, a nie len názov znaku plus/mínus. Sme presvedčení, že modelovanie aritmetických a algebraických výrazov s ohľadom na zrozumiteľnosť a jazykovú správnosť má veľkú hodnotu a odporúčame to dodržiavať.

ČASŤ 2



Časť 2

Téma: Sčítanie algebraických výrazov pomocou žetónov

AKTIVITA 1: Sčítanie jednočlenov pomocou modelov {Názov len pre učiteľa}.

Spoločná práca – učiteľ používa veľké magnetické alebo virtuálne žetóny – práca pri tabuli, záznam aktivity vedľa:

- Akým spôsobom opíšete situáciu:
 - Mám

x

x

 a pridám

x

x

x

. Koľko ich mám spolu?
Ž: Mám päť bielych obdĺžnikových žetónov.
Akým zápisom zaznamenáme túto situáciu?
Žiaci zapisujú: $2x + 3x = 5x$

DOHODA: PRIDAŤ znamená SČÍTAŤ

- Mám jeden biely štvorcový žetón

x^2

 a pridám dva biele štvorcové žetóny

x^2

x^2

. Koľko ich mám spolu?
Ž: Mám tri biele štvorcové žetóny.
Akým zápisom zaznamenáme túto situáciu?
Žiaci zapisujú: $x^2 + 2x^2 = 3x^2$
- Mám dva čierne obdĺžnikové žetóny

$-x$

$-x$

 a pridám štyri čierne obdĺžnikové žetóny

$-x$

$-x$

$-x$

$-x$

.
Koľko ich mám spolu?
Ž: Mám šesť čiernych obdĺžnikových žetónov.
Akým zápisom zaznamenáme túto situáciu?
Žiaci zapisujú: $-2x + (-4x) = -6x$
- Mám jeden čierny štvorcový žetón

$-x^2$

 a pridám tri čierne štvorcové žetóny

$-x^2$

$-x^2$

$-x^2$

.
Koľko ich mám spolu?
Ž: Mám štyri čierne štvorcové žetóny.
Akým zápisom zaznamenáme túto situáciu?
Žiaci zapisujú: $-x^2 + (-3x^2) = -4x^2$

POZNÁMKA K ZÁPISU: Dohodli sme sa, že ak hovoríme o opačnom výraze (so znamienkom mínus), píšeme ho v zátvorkách. Pri prvom člene súčtu nemusíme písať zátvorky.

- K trom bielym obdĺžnikovým žetónom x x x pridám jeden čierny obdĺžnikový žetón $-x$.

Žiaci odpovedajú: Spolu mám dva biele obdĺžnikové žetóny a zapíšu si: $3x + (-x) = 2x$

- K $-x^2$ $-x^2$ $-x^2$ pridávam x^2 x^2

Žiaci odpovedajú: Spoločne mám jeden čierny štvorcový žetón a zapíšu si: $(-3x^2) + 2x^2 = -x^2$

AKTIVITA 2: Matematizácia polynomickeho modelu bez použitia neutrálnych dvojíc {Názov len pre učiteľa }.

- Koľko žetónov mám celkovo:

- K dvom bielym štvorcovým žetónom x^2 x^2 pridám tri biele okrúhle

žetóny $+$ $+$ $+$ a jeden čierny štvorcový žetón $-x^2$. Aký výraz predstavuje tento súbor žetónov?

Žiaci odpovedajú: Spolu mám žetóny: jeden biely štvorcový a tri biele okrúhle a zapíšu si: $2x^2 + 3 + (-x^2) = x^2 + 3$

Učiteľ zadá žiakom, ktoré žetóny majú usporiadať (zároveň môže usporiadať žetóny aj na tabuli). Žiaci samostatne usporiadajú žetóny na laviciach a zapíšu si výraz.

	Učiteľ umiestni žetóny na tabuľu	Žiaci odpovedajú	Poznámky pre učiteľa / Otázky na diskusiu
1.	x x $+$	$2x + 1$	POZNÁMKY: - Žiaci si do zošitov napíšu algebrické výrazy ku každému číslu situácie: 1. $2x + 1$ 2. $-x^2 + (-2)$ 3....
2.	$-x^2$ $-$ $-$	$-x^2 + (-2)$	
3.	x^2 $-x$	$x^2 + (-x)$	
4.	$-x^2$ x $-$	$-x^2 + x + (-1)$	
5.	$-x^2$ $-x^2$ x	$-2x^2 + x$	

This material is provided by the [AMMA Team](#), responsible institution: Pedagogical University of Krakow



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Kontrola správnosti zápisu algebraických výrazov (napr. učiteľ prečíta číslo situácie znázornenej pomocou modelu a žiaci prečítajú algebraický výraz)

AKTIVITA 3: Matematizácia polynomickeho modelu pomocou neutrálnych dvojíc {Názov len pre učiteľa }.

Učiteľ povie žiakom, ktoré žetóny majú usporiadať (zároveň môže usporiadať aj žetóny na tabuli). Žiaci **samostatne usporiadajú žetóny na laviciach**. Žiaci odpovedia a zdôvodnia, ktorý algebraický výraz je zobrazený.

Diskusia v pozadí o najefektívnejšom spôsobe ukladania.

	Učiteľ povie žiakom, aby si zobrali žetóny:	Žiaci usporiadajú žetóny	Žiaci odpovedajú	Poznámky pre učiteľa / Otázky na diskusiu
1.	5 bielych štvorcových žetónov, 2 biele obdĺžnikové žetóny a 1 biely okrúhly žetón		$5x^2 + 2x + 1$	- Žiaci sami umiestnia žetóny na lavicu, ako chcú; ak ich niektorí umiestnia chaoticky a iní úhľadne jeden pod druhý, je to príležitosť diskutovať o spôsoboch – čo je užitočnejšie.
2.	6 bielych štvorcových žetónov, 1 čierny štvorcový žetón, 2 biele obdĺžnikové žetóny a 1 biely okrúhly žetón		$6x^2 + (-x^2) + 2x + 1$ alebo $5x^2 + 2x + 1$	- Ak na usporiadanie (ukladanie bielych žetónov rovnakého tvaru nad čierne alebo naopak) neprichádzajú žiaci prirodzene, spontánne, zámerne sa pýtajte na najefektívnejší spôsob ukladania.
3.	5 bielych štvorcových žetónov, 4 biele obdĺžnikové žetóny, 2 čierne obdĺžnikové žetóny a 1 biely okrúhly žetón		$5x^2 + 4x + (-2x) + 1$ alebo $5x^2 + 2x + 1$	Stačí len zoradiť bielu pod čiernu alebo naopak?

4.	5 bielych štvorcových žetónov, 2 biele obdĺžnikové žetóny, 2 biele okrúhle žetóny a 1 čierny okrúhly žetón		$5x^2 + 2x + 2 + (-1)$ alebo $5x^2 + 2x + 1$	
5.	6 bielych štvorcových žetónov, 1 čierny štvorcový žetón, 5 bielych obdĺžnikových žetónov, 3 čierne obdĺžnikové žetóny a 1 biely okrúhly žetón		$6x^2 + (-x^2) + 5x + (-3x) + 1$ alebo $5x^2 + 2x + 1$	
6.	5 bielych štvorcových žetónov, 6 bielych obdĺžnikových žetónov, 4 čierne obdĺžnikové žetóny, 3 biele okrúhle žetóny a 2 čierne okrúhle žetóny		$5x^2 + 6x + (-4x) + 3 + (-2)$ alebo $5x^2 + 2x + 1$	
7.	7 bielych štvorcových žetónov, 2 čierne štvorcové žetóny, 3 biele obdĺžnikové žetóny, 1 čierny obdĺžnikový žetón, 4 biele okrúhle žetóny a 3 čierne okrúhle žetóny		$7x^2 + (-2x^2) + 3x + (-x) + 4 + (-3)$ alebo $5x^2 + 2x + 1$	

AKTIVITA 4: Zobrazenie algebraických výrazov pomocou modelu

Žiaci pracujú samostatne.

Vykonáva sa ďalšia úloha formou súťaže „zriedkavec“: Zobrazte pomocou žetónov daný výraz tak, aby nikto iný takéto zobrazenie nemal.

Najzriedkavejšie riešenie vyháva. (Bodovanie: každý dostane toľko bodov, aký bol počet žiakov s daným riešením. Vyhrá žiak s najmenším počtom bodov.)

- Zostavte zaujímavý súbor prezentujúci algebraický výraz; postupne:

1. $3x^2 + 1$,
2. $5x^2 + (-2x)$,
3. $-4x + (-3)$,
4. $2x^2 + (-x) + 6$,
5. 0

Zbierame ďalšie nápady z triedy:

- Usporiadal to niekto inak?

{Tabuľka znázorňuje očakávané/vybrané výsledky vzoriek.}

	Daný algebraický výraz	Možný model(y)
1.	$3x^2 + 1$	<p>napr. </p> <p></p> <p>napr. </p> <p></p> <p> </p> <p></p> <p>napr. </p> <p></p> <p></p> <p></p>

2.	$5x^2 + (-2x)$	<p>napr. </p> <p>napr. </p> <p>napr. </p>
3.	$-4x + (-3)$	<p>napr. </p> <p>napr. </p>
4.	$2x^2 + (-x) + 6$	<p>napr. </p> <p>napr. </p>

		$\begin{array}{ c c c } \hline x^2 & x^2 & x^2 \\ \hline \end{array}$ <p><i>napr.</i></p> $\begin{array}{ c } \hline -x^2 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c } \hline x \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ c c } \hline -x & -x \\ \hline \end{array}$ <p>⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕</p> <p>⊖</p>
5.	0	$\begin{array}{ c c } \hline -x^2 & x^2 \\ \hline \end{array}$ <p><i>napr.</i></p> $\begin{array}{ c c c c } \hline x^2 & -x^2 & x & -x \\ \hline \end{array}$ <p><i>napr.</i></p> $\begin{array}{ c c } \hline -x^2 & -x \\ \hline \end{array} \ominus$ $\begin{array}{ c c } \hline x^2 & x \\ \hline \end{array} \oplus$

AKTIVITA 5: Zavedenie pojmu **OPAČNÝ VÝRAZ**

Spoločná práca:

- Napr. $2x + 3x$ Čo by to znamenalo pomocou žetónov?
{Žiaci podávajú slovný opis}
- A ako by pomocou žetónov vyzeral príklad $(-2x) + (-3x)$?
{Žiaci podávajú slovný opis: beriem si žetóny: 2 čierne obdĺžnikové žetóny a pridám 3 čierne obdĺžnikové žetóny – spolu mám 5 čiernych obdĺžnikových žetónov}
- A $4x^2 + (-4x^2)$?
{Ž: vychádza 0, pretože žetóny: 4 biele štvorcové žetóny a 4 čierne štvorcové žetóny sa navzájom anihilujú (nulujú)}
- Keďže výsledkom sčítania týchto dvoch výrazov je 0, ako nazveme tieto dva výrazy:
 $4x^2 + (-4x^2)$?
{OPAČNÉ VÝRAZY}
- Uveďte príklad iných opačných výrazov

Práca vo dvojiciach:

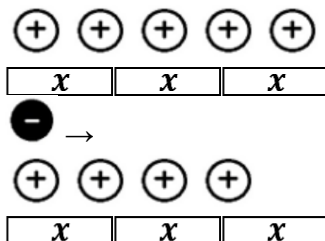
Príklady A a B žiaci zobrazujú pomocou žetónov vo dvojiciach: jeden žiak upravuje výraz $-x + 2x$, druhý $2x + (-x)$. Ďalšie príklady spoločne.

- Odôvodnite výsledok pomocou žetónov.

Daný algebraický výraz na úpravu	Žiaci usporiadajú model a zdôvodnia	Poznámky pre učiteľa
A) $-x + 2x =$ (jeden žiak v lavici) $2x + (-x) =$ (druhý žiak v lavici)		POZNÁMKY: - Žiakov žiadame aby hovorili. Je dôležitý jazyk zdôvodnenia: ak majú žetóny rovnaký tvar, biely žetón s čiernym sa nulujú a zostane biely. - Žiaci by si mali všimnúť, že zápisy oboch výrazov (iba vymenené členy), môžu byť reprezentované rovnakým usporiadaním žetónov, pretože ide len o počítanie v opačnom poradí. Ak si to nevšimnú, potom položte vhodnú otázku, napr. po prvých štyroch úlohách: Čo ste si všimli?
B) $-3x^2 + 2x^2 =$ $2x^2 + (-3x^2) =$		- Dávať pozor na zápis zátvoriek – nesmiem napísať po sebe dve znamienka

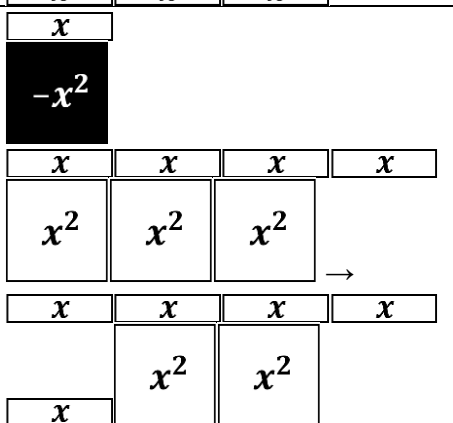
Ďalšie príklady riešime podobným spôsobom, kým si žiaci sami nevšimnú pravidelnosť.

C) $5 + 3x + (-1) =$

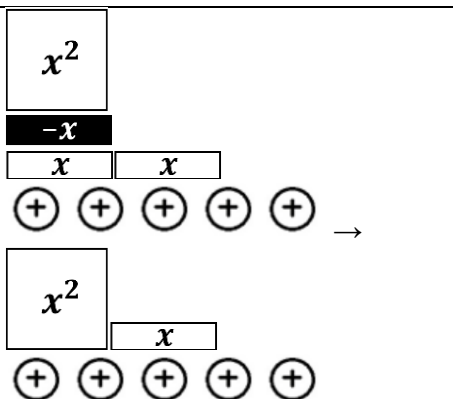


- Pozor, aby sa znak operácie čítal ako akcia pridať (nie len "plus"):
K minus $3x^2$ PRIDAŤ $2x^2$

D) $x + (-x^2) + 4x + 3x^2 =$



E) $x^2 + (-x) + 2x + 5 =$



Za týmito príkladmi nasleduje **poznámka**.

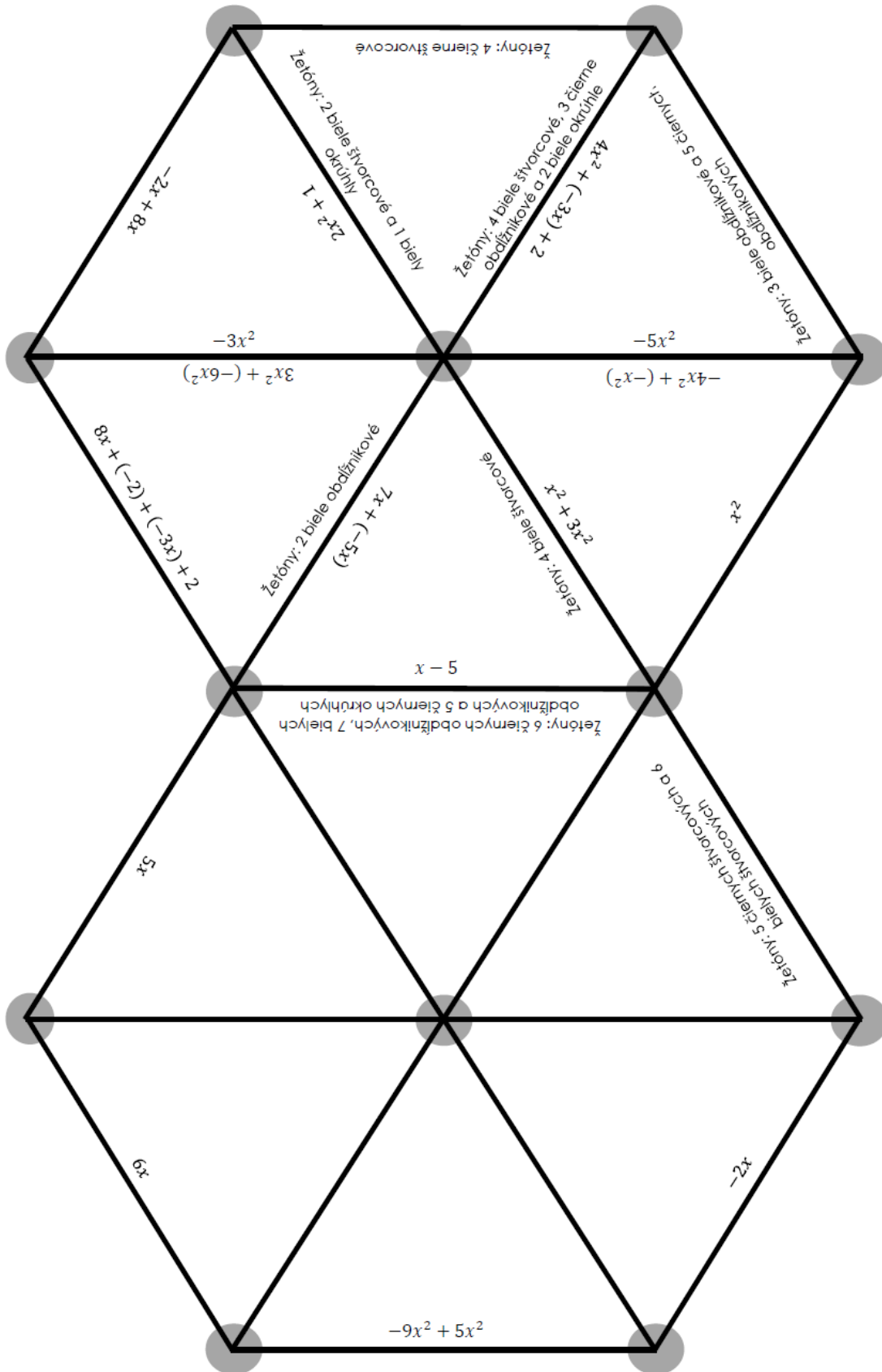
- *Napište si vybraný príklad do zošita a výsledok zdôvodnite znázornením situácie pomocou žetónov.*

AKTIVITA 6: Hra - Trimino

Žiaci vo dvojiciach dostanú dieliky v tvare trojuholníka (vystrihnutý výtlačok obrázka nižšie). Žiaci ich majú usporiadať tak, aby susedné hrany dielikov zodpovedali algebraickým výrazom a opisu ich modelu. Výsledkom bude hviezda.

V závislosti od triedy a potrieb môžu byť žiaci odmenení konvenčnou cenou za najrýchlejšie usporiadanie.





V nasledujúcej tabuľke je uvedené, ktoré opisy by mali byť pri sebe (odpovede pre učiteľa):

1.	$2x^2 + 1$	Žetóny: 2 biele štvorcové a 1 biely okrúhly
2.	$4x^2 + (-3x) + 2$	Žetóny: 4 biele štvorcové, 3 čierne obdĺžnikové a 2 biele okrúhle
3.	$-4x^2 + (-x^2)$	$-5x^2$
4.	$x^2 + 3x^2$	Žetóny: 4 biele štvorcové
5.	$7x + (-5x)$	Žetóny: 2 biele obdĺžnikové
6.	$3x^2 + (-6x^2)$	$-3x^2$
7.	$-2x + 8x$	$6x$
8.	$-9x^2 + 5x^2$	Žetóny: 4 čierne štvorcové
9.	Žetóny: 3 biele obdĺžnikové a 5 čiernych obdĺžnikových	$-2x$
10.	Žetóny: 5 čiernych štvorcových a 6 bielych štvorcových	x^2
11.	Žetóny: 6 čiernych obdĺžnikových, 7 bielych obdĺžnikových a 5 čiernych okrúhlych	$x - 5$
12.	$8x + (-2) + (-3x) + 2$	$5x$

