Przewodnik Nauczyciela
Opis cyklu lekcji

Tytuł cyklu lekcji	**Wyrażenia algebraiczne, ich dodawanie i odejmowanie z wykorzystaniem żetonów**
Czas trwania	*5-8 godzin lekcyjnych (w zależności od tempa pracy uczniów i poziomu nauczania)*
Klasa/Wiek	*Klasy 6-8 szkoły podstawowej (12-15 lat);* *Klasa I szkoły ponadpodstawowej (dla uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki)*
Cel cyklu lekcji i jego krótki opis	*Celem tego cyklu lekcji jest kształtowanie pojęcia wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz dodawania i odejmowania takich wyrażeń z wykorzystaniem żetonów.* *Scenariusz może być wykorzystany zarówno w młodszych klasach jako wprowadzenie wyrażeń algebraicznych, jak i na lekcjach powtórzeniowych z uczniami w starszych klasach.* *Uczniowie w trakcie zabawy z modelem konkretnym (żetonami) budują pojęcie wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz wypracowują rozumienie działania dodawania jako dokładania żetonów i odejmowania jako zabierania żetonów. Dzięki temu uczniowie podejmują się modelowania matematycznego.*
Pomoce naukowe	*Każdy uczeń ma do dyspozycji i manipulacji po 10 żetonów każdego koloru (biały/czarny) i każdego kształtu (okrągły/podłużny/kwadratowy), łącznie zestaw 60 żetonów.*

Uwaga językowa do pracy z żetonami w zakresie liczb całkowitych i wyrażeń algebraicznych:

W naszych scenariuszach zwracamy uwagę na to, by świadomie rozdzielić językowo dwa światy – świat matematyki, czyli abstrakcji i świat przedmiotów rzeczywistych – w naszym przypadku żetonów. Dlatego w kontekście żetonów używamy terminów opisujących jego wygląd: biały/czarny żeton okrągły/podłużny/kwadratowy a <u>nie używamy</u> krótkiej formy białe/czarne koło/prostokąt/kwadrat. Podobnie w kontekście żetonów mówimy o dokładaniu i zabieraniu żetonów – a w kontekście matematyki o działaniach dodawania i odejmowania. Zwracamy również uwagę na to, by znaki działań czytać słownie jako dodać/odjąć, a nie tylko czytając nazwę znaku plus/minus. Jesteśmy przekonani, że modelowanie wyrażeń arytmetycznych i algebraicznych z dbałością o czystość i poprawność językową jest dużą wartością i ją rekomendujemy.

CZĘŚĆ 2

Część 2
Temat: Dodawanie wyrażeń algebraicznych na żetonach

AKTYWNOŚĆ 1: Dodawanie jednomianów na żetonach *{nazwa tylko dla nauczyciela}*

Praca wspólna – nauczyciel wykorzystuje duże magnetyczne lub wirtualne żetony – praca przy tablicy, zapis działania obok:

- *Jakim działaniem opiszemy sytuację:*
  - *Mam* $\boxed{x}\boxed{x}$ *i jeszcze* $\boxed{x}\boxed{x}\boxed{x}$*. Ile mam razem?*
    U: Mam pięć białych żetonów podłużnych.
    Jakim działaniem zapiszemy tę sytuację?
    Uczniowie opisują: $2x + 3x = 5x$

UMOWA: DOŁOŻYĆ oznacza DODAĆ

  - *Mam jeden biały żeton kwadratowy* $\boxed{x^2}$ *i dokładam dwa białe żetony kwadratowe* $\boxed{x^2}\boxed{x^2}$*. Ile mam razem?*
    U: Mam trzy białe żetony kwadratowe
    Jakim działaniem zapiszemy tę sytuację?
    Uczniowie opisują: $x^2 + 2x^2 = 3x^2$

  - *Mam dwa czarne żetony podłużne* $\boxed{-x}\boxed{-x}$ *i dokładam cztery czarne żetony podłużne* $\boxed{-x}\boxed{-x}\boxed{-x}\boxed{-x}$.
    Ile mam razem?

    U: Mam sześć czarnych żetonów podłużnych

    Jakim działaniem zapiszemy tę sytuację?

    Uczniowie opisują: $-2x + (-4x) = -6x$

  - *Mam jeden czarny żeton kwadratowy* $\boxed{-x^2}$ *i dokładam trzy czarne żetony kwadratowe* $\boxed{-x^2}\boxed{-x^2}\boxed{-x^2}$*. Ile mam razem?*
    U: Mam cztery czarne żetony kwadratowe
    Jakim działaniem zapiszemy tę sytuację?
    Uczniowie opisują: $-x^2 + (-3x^2) = -4x^2$

UWAGA NA ZAPIS : Nawias jest konieczny, jeśli dwa znaki są obok siebie (jak w liczbach całkowitych).

- *Do trzech białych podłużnych żetonów* $\boxed{x}\boxed{x}\boxed{x}$ *dokładam jeden czarny podłużny żeton* $\boxed{-x}$.
  Uczniowie odpowiadają: razem mam dwa białe podłużne żetony i zapisują: $3x + (-x) = 2x$
- *Do* $\boxed{-x^2}\boxed{-x^2}\boxed{-x^2}$ *dokładam* $\boxed{x^2}\boxed{x^2}$
  Uczniowie odpowiadają: razem mam jeden czarny kwadratowy żeton i zapisują: $(-3x^2) + 2x^2 = -x^2$

AKTYWNOŚĆ 2: Matematyzowanie modelu wielomianu bez zastosowania par neutralnych *{nazwa tylko dla nauczyciela}*

- *Ile mam żetonów razem?*
  - *Do dwóch białych kwadratowych żetonów* $\boxed{x^2}\boxed{x^2}$ *dokładam trzy białe okrągłe żetony* ⊕ ⊕ ⊕ *i jeden czarny kwadratowy żeton* $\boxed{-x^2}$. *Jakie wyrażenie reprezentuje ten zestaw żetonów?*
    Uczniowie odpowiadają: Ostatecznie mamy jeden biały kwadratowy żeton i trzy białe okrągłe żetony, więc zapisujemy: $2x^2 + 3 + (-x^2) = x^2 + 3$

Nauczyciel pokazuje uczniom, jakie żetony mają ułożyć (może jednocześnie sam układać). Uczniowie **samodzielnie układają na ławkach i zapisują wyrażenie.**

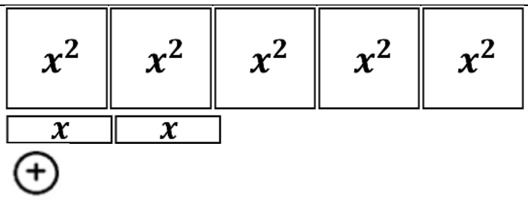
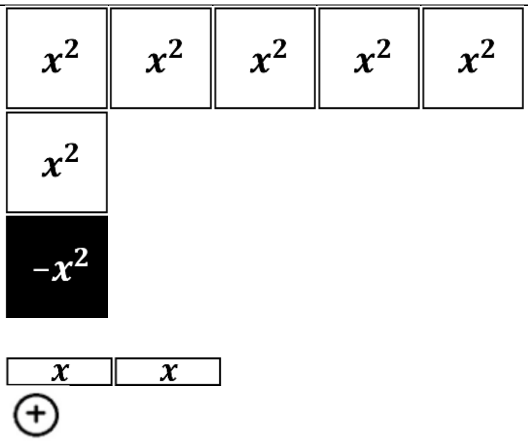
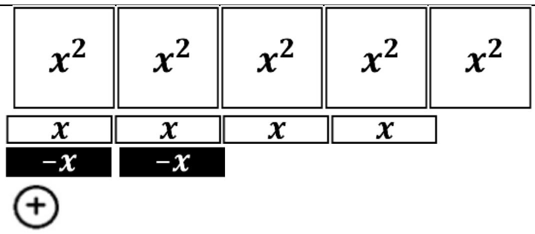
LP	Nauczyciel układa żetony na tablicy	Uczniowie odpowiadają	*Uwagi dla nauczyciela* / Kwestie do dyskusji
1.	$\boxed{x}\boxed{x}$ ⊕	$2x + 1$	
2.	$\boxed{-x^2}$ ⊖ ⊖	$-x^2 + (-2)$	*UWAGI:* *- uczniowie w zeszytach zapisują wyrażenia algebraiczne pod poszczególnymi numerami sytuacji:* *1.* $2x + 1$ *2.* $-x^2 + (-2)$ *3….*
3.	$\boxed{x^2}\boxed{-x}$	$x^2 + (-x)$	
4.	$\boxed{-x^2}\boxed{x}$ ⊖	$-x^2 + x + (-1)$	
5.	$\boxed{-x^2}\boxed{-x^2}\boxed{x}$	$-2x^2 + x$	

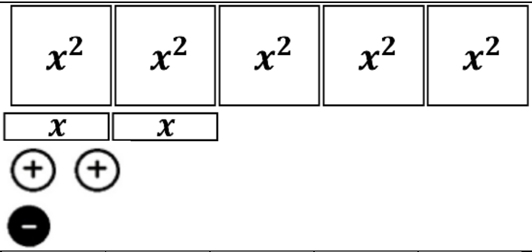
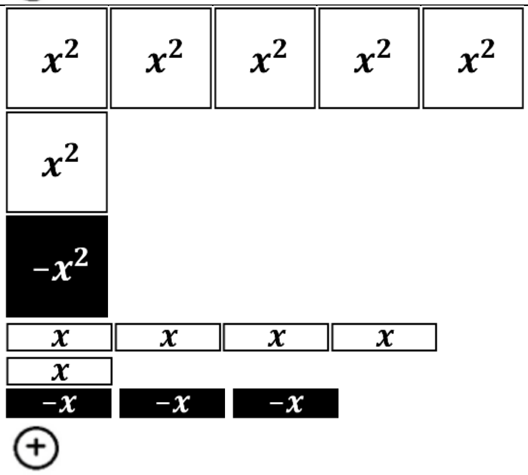
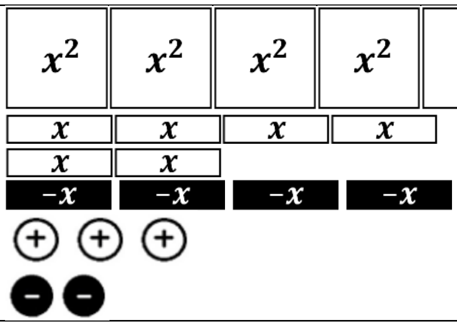
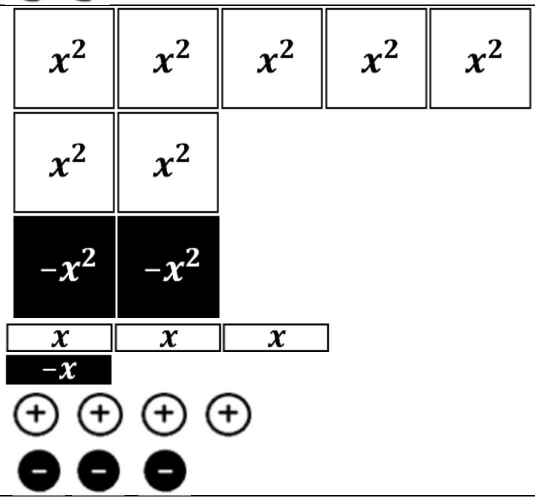
Sprawdzamy poprawność zapisu kolejnych wyrażeń algebraicznych (np. nauczyciel czyta numer sytuacji przedstawionej na modelu i uczniowie podają – czytają wyrażenie algebraiczne)

AKTYWNOŚĆ 3: Matematyzowanie modelu wielomianu z zastosowaniem par neutralnych

Nauczyciel mówi uczniom, jakie żetony mają ułożyć (może jednocześnie sam układać). Uczniowie ***samodzielnie układają na ławkach****. Uczniowie odpowiadają i uzasadniają, jakie wyrażenie algebraiczne zostało przedstawione.*

Pogadanka na tle klasy na temat najbardziej efektywnego sposobu układania.

LP	Nauczyciel mówi, by uczniowie wzięli żetony:	Uczniowie układają żetony	Odpowiedź ucznia	*Uwagi dla nauczyciela* / Kwestie do naszej dyskusji
1.	5 białych kwadratowych, 2 białe podłużne i 1 biały okrągły		$5x^2+2x+1$	*– Uczniowie sami kładą jakkolwiek chcą na ławce; jeśli jedni ułożą chaotycznie, a inni uporządkowane jedno pod drugim to jest okazja, by porozmawiać nad sposobami – który bardziej przydatny - Jeśli porządkowanie (układanie białych nad czarnymi lub odwrotnie figur tych samych kształtów) nie wyjdzie naturalnie, spontanicznie od uczniów, to celowo zadać pytania o najbardziej efektywny sposób układania. Czy wystarczy tylko układanie biały nad czarnym lub odwrotnie?*
2.	6 białych kwadratowych, 1 czarny kwadratowy, 2 białe podłużne i 1 biały okrągły		$6x^2+(-x^2)+2x+1$ lub $5x^2+2x+1$	
3.	5 białych kwadratowych, 4 białe podłużne, 2 czarne podłużne i 1 biały okrągły		$5x^2+4x+(-2x)+1$ lub $5x^2+2x+1$	

4.	5 białych kwadratowych, 2 białe podłużne, 2 białe okrągłe i 1 czarny okrągły		$5x^2 + 2x + 2 + (-1)$ lub $5x^2 + 2x + 1$	
5.	6 białych kwadratowych, 1 czarny kwadratowy, 5 białych podłużnych, 3 czarne podłużne i 1 biały okrągły		$6x^2 + (-x^2) + 5x$ $+(-3x) + 1$ lub $5x^2 + 2x + 1$	
6.	5 białych kwadratowych, 6 białych podłużnych, 4 czarne podłużne, 3 białe okrągłe i 2 czarne okrągłe		$5x^2 + 6x + (-4x)$ $+3 + (-2)$ lub $5x^2 + 2x + 1$	
7.	7 białych kwadratowych, 2 czarne kwadratowe, 3 białe podłużne, 1 czarny podłużny, 4 białe okrągłe i 3 czarne okrągłe		$7x^2 + (-2x^2) + 3x$ $+(-x) + 4 + (-3)$ lub $5x^2 + 2x + 1$	

AKTYWNOŚĆ 4: Przedstawienie wyrażeń algebraicznych na modelu

Uczniowie pracują indywidualnie.

Realizujemy kolejne zadanie w formie konkursu "Rzadkie": Ułóż podane wyrażenie za pomocą żetonów tak, aby nikt inny nie miał takiego sposobu.

Wygrywa najrzadsze rozwiązanie (punktacja: każdy otrzymuje tyle punktów, ilu uczniów ma dane rozwiązanie. Uczeń z najmniejszą liczbą punktów wygrywa).

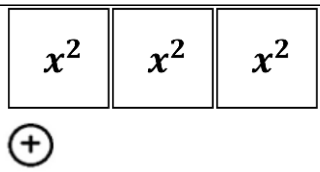
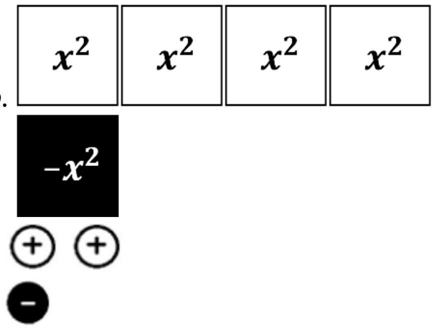
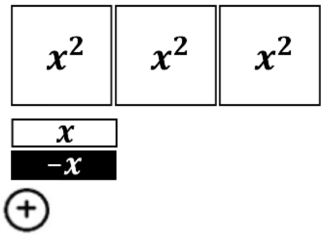
- *Zbuduj ciekawy zestaw prezentujący wyrażenie algebraiczne; kolejno:*

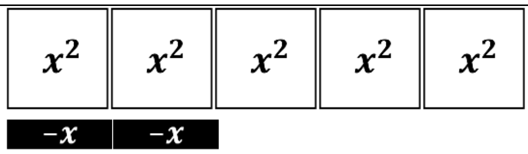
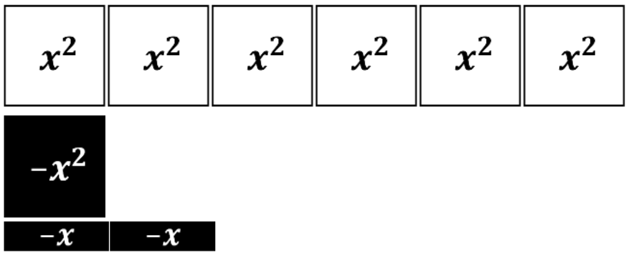
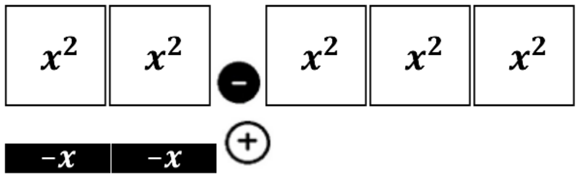
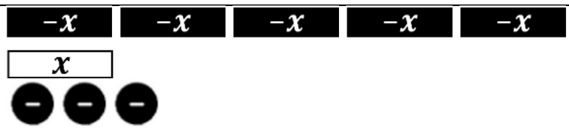
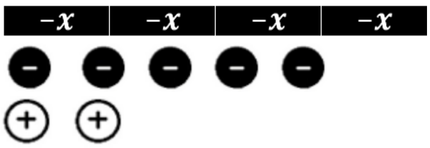
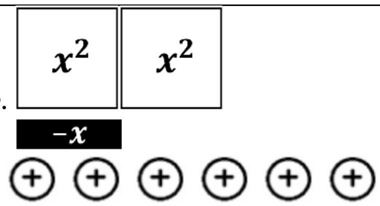
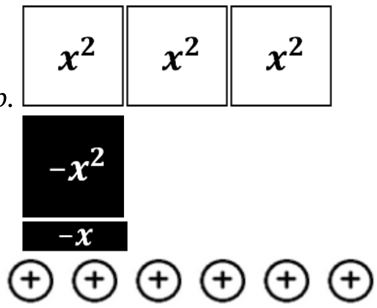
1. $3x^2 + 1$,
2. $5x^2 + (-2x)$,
3. $-4x + (-3)$,
4. $2x^2 + (-x) + 6$,
5. 0

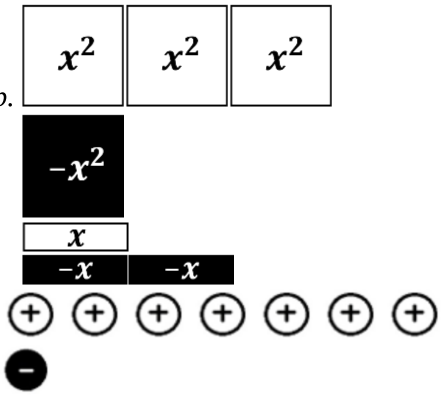
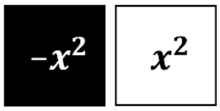
Zbieramy kolejne pomysły z klasy:

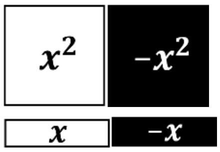
- *Czy ktoś ułożył to inaczej?*

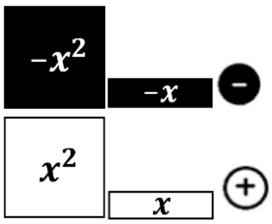
{Tabelka jedynie obrazuje oczekiwane/wybrane przykładowe rezultaty}

LP	Zadane wyrażenie algebraiczne	Przykładowe model(e)
1.	$3x^2 + 1$	*np.*  *np.*  *np.* 

2.	$5x^2 + (-2x)$	np.  np.  np. 
3.	$-4x + (-3)$	np.  np. 
4.	$2x^2 + (-x) + 6$	np.  np. 

<table>
<tr><td></td><td></td><td>np. 
</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>0</td><td>np. 

np. 

np. 
</td></tr>
</table>

AKTYWNOŚĆ 5: Wprowadzenie pojęcia *WYRAŻENIA PRZECIWNE*

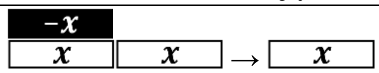
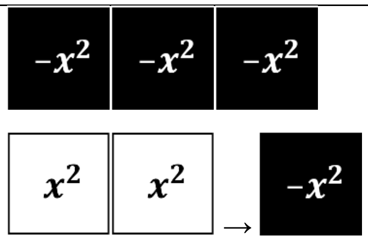
Praca wspólna:

- *Np.* $2x + 3x$ *Co to by oznaczało na żetonach?*
  {Uczniowie podają słowny opis}
- *A jak na żetonach wyglądałoby działanie* $(-2x) + (-3x)$*?*
  {Uczniowie podają słowny opis: biorę żetony: 2 czarne podłużne i dokładam 3 czarne podłużne – razem mam 5 czarnych podłużnych}
- *A* $4x^2 + (-4x^2)$*?*
  {U: wyjdzie 0, bo żetony: 4 białe kwadratowe i 4 czarne kwadratowe unicestwiają się}
- *Skoro w wyniku dodawania tych dwóch wyrażeń wychodzi 0, to jak nazwiemy te dwa wyrażenia:* $4x^2 + (-4x^2)$*?*
  {WYRAŻENIA DO SIEBIE PRZECIWNE}
- *Podajcie przykład innych wyrażeń do siebie przeciwnych*

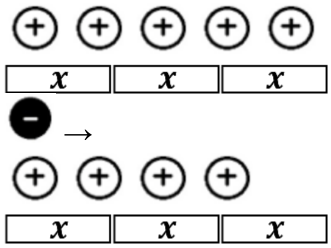
Praca w parach:

Przykłady A i B uczniowie przedstawiają na żetonach w parach: jedna osoba działanie $-x + 2x$, druga $2x + (-x)$. Dalsze przykłady wspólnie.

- *Proszę uzasadnić wynik na żetonach.*

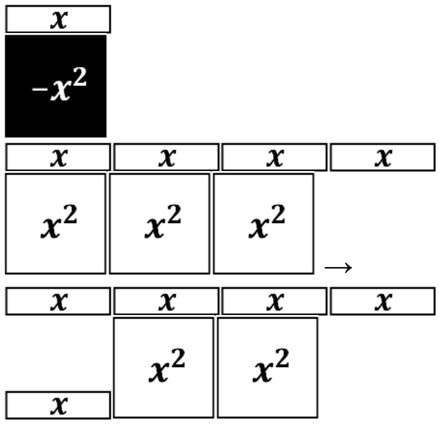
Zadane działanie	**Uczniowie układają model i uzasadniają**	***Uwagi dla nauczyciela***
A) $-x + 2x =$ *(jedna osoba w ławce)* $2x + (-x) =$ *(druga osoba w ławce)* *Kolejne przykłady robimy podobnie, aż uczniowie sami zauważą przemienność.*		UWAGI: - *Prosimy uczniów o wypowiedź, ważny jest język uzasadnienia: jeśli żetony są tego samego kształtu, żeton biały z czarnym się unicestwią i zostanie biały.* - *Uczniowie powinni zauważyć, że zapisy obu działań (przemienność) mogą być reprezentowane przez ten sam układ żetonów, bo to kwestia zliczania w odpowiedniej kolejności. Jeśli nie zauważą, to należy zadać odpowiednie pytanie, np. po czterech pierwszych działaniach: Co zauważacie?*
B) $-3x^2 + 2x^2 =$ $2x^2 + (-3x^2) =$		

C) $5 + 3x + (-1) =$

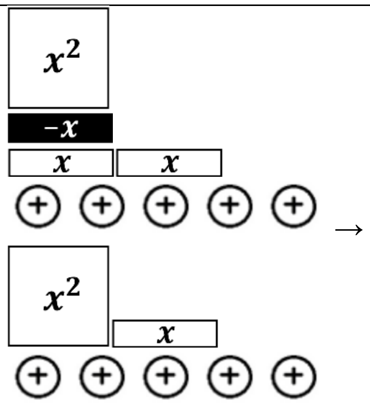


- Zwracamy uwagę na nawiasy - nie wolno pisać dwóch znaków pod rząd.
- Zwracamy uwagę na wypowiedź, by znak działania był czytany jako działanie (a nie symbol plus):
minus $3x^2$ ***DODAĆ*** $2x^2$

D) $x + (-x^2) + 4x + 3x^2 =$



E) $x^2 + (-x) + 2x + 5 =$



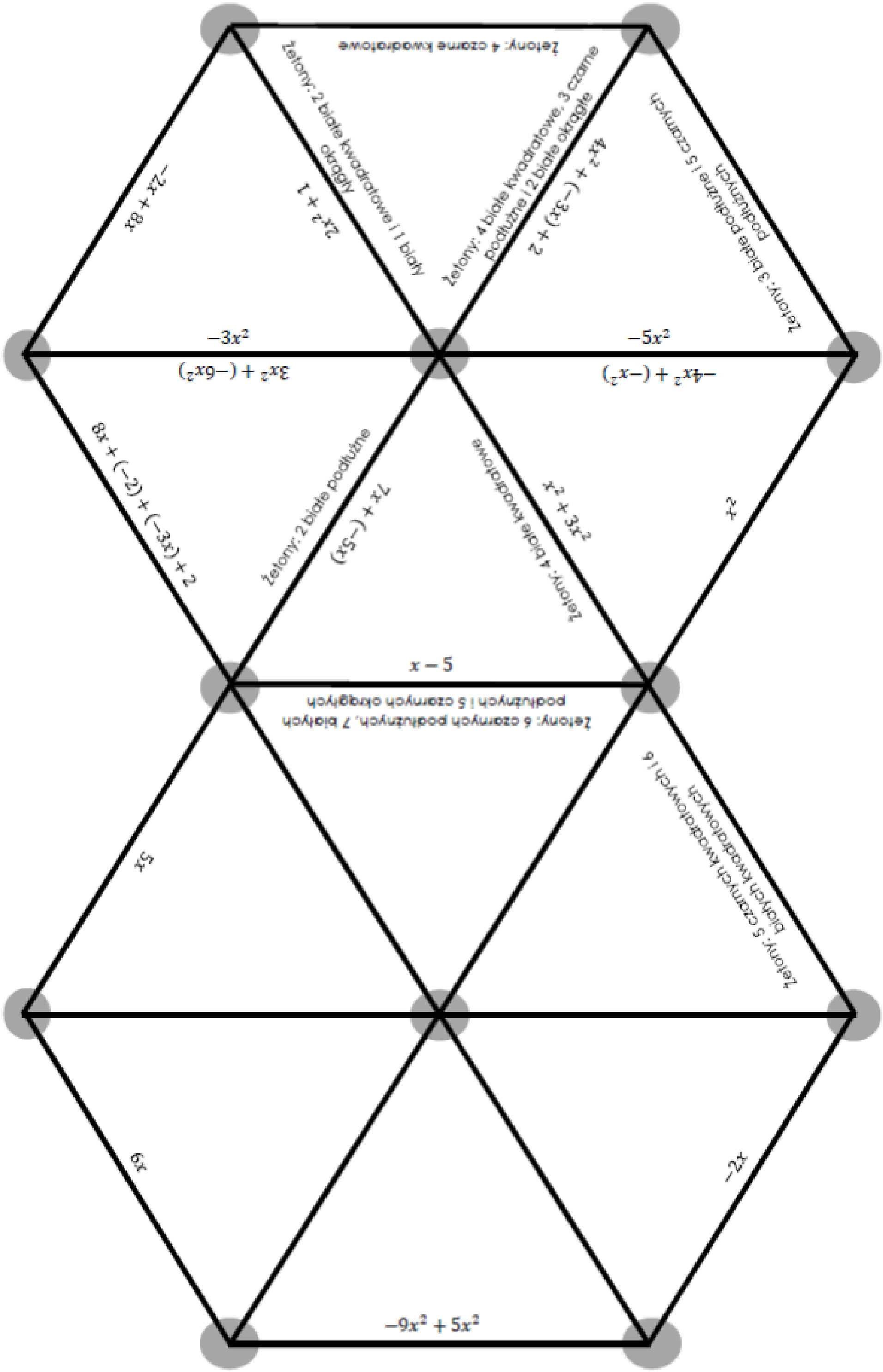
Po tych przykładach **notatka.**

- Zapisz wybrane działanie w zeszycie i uzasadnij ilustrując na rysunku, jak z odpowiednich żetonów powstaje wynik.

AKTYWNOŚĆ 6: *Gra – Trimino*

Uczniowie w parach otrzymują elementy w kształcie trójkąta (rozcięty wydruk poniższego rysunku). Uczniowie mają ułożyć je tak, by pasowały do siebie wyrażenia algebraiczne i opis ich modelu znajdujące się na przylegających brzegach elementów. W wyniku uczniowie otrzymają gwiazdę.

W zależności od klasy i potrzeb można za najszybsze ułożenie nagrodzić uczniów umowną nagrodą.



[Załącznik: B_PL_Trimino]

Poniższa tabela pokazuje jakie opisy powinny przylegać brzegami do siebie (odpowiedzi dla nauczyciela):

1.	$2x^2+1$	Żetony: 2 białe kwadratowe i 1 biały okrągły
2.	$4x^2+(-3x)+2$	Żetony: 4 białe kwadratowe, 3 czarne podłużne i 2 białe okrągłe
3.	$-4x^2+(-x^2)$	$-5x^2$
4.	x^2+3x^2	Żetony: 4 białe kwadratowe
5.	$7x+(-5x)$	Żetony: 2 białe podłużne
6.	$3x^2+(-6x^2)$	$-3x^2$
7.	$-2x+8x$	$6x$
8.	$-9x^2+5x^2$	Żetony: 4 czarne kwadratowe
9.	Żetony: 3 białe podłużne i 5 czarnych podłużnych	$-2x$
10.	Żetony: 5 czarnych kwadratowych i 6 białych kwadratowych	x^2
11.	Żetony: 6 czarnych podłużnych, 7 białych podłużnych i 5 czarnych okrągłych	$x-5$
12.	$8x+(-2)+(-3x)+2$	$5x$