Przewodnik Nauczyciela
Opis cyklu lekcji

Tytuł cyklu lekcji	**Wyrażenia algebraiczne, ich dodawanie i odejmowanie z wykorzystaniem żetonów**
Czas trwania	*5-8 godzin lekcyjnych (w zależności od tempa pracy uczniów i poziomu nauczania)*
Klasa/Wiek	*Klasy 6-8 szkoły podstawowej (12-15 lat);* *Klasa I szkoły ponadpodstawowej (dla uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki)*
Cel cyklu lekcji i jego krótki opis	*Celem tego cyklu lekcji jest kształtowanie pojęcia wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz dodawania i odejmowania takich wyrażeń z wykorzystaniem żetonów.* *Scenariusz może być wykorzystany zarówno w młodszych klasach jako wprowadzenie wyrażeń algebraicznych, jak i na lekcjach powtórzeniowych z uczniami w starszych klasach.* *Uczniowie w trakcie zabawy z modelem konkretnym (żetonami) budują pojęcie wyrażenia algebraicznego i wyrażenia do niego przeciwnego oraz wypracowują rozumienie działania dodawania jako dokładania żetonów i odejmowania jako zabierania żetonów. Dzięki temu uczniowie podejmują się modelowania matematycznego.*
Pomoce naukowe	*Każdy uczeń ma do dyspozycji i manipulacji po 10 żetonów każdego koloru (biały/czarny) i każdego kształtu (okrągły/podłużny/kwadratowy), łącznie zestaw 60 żetonów.*

Uwaga językowa do pracy z żetonami w zakresie liczb całkowitych i wyrażeń algebraicznych:

W naszych scenariuszach zwracamy uwagę na to, by świadomie rozdzielić językowo dwa światy – świat matematyki, czyli abstrakcji i świat przedmiotów rzeczywistych – w naszym przypadku żetonów. Dlatego w kontekście żetonów używamy terminów opisujących jego wygląd: biały/czarny żeton okrągły/podłużny/kwadratowy a <u>nie używamy</u> krótkiej formy białe/czarne koło/prostokąt/kwadrat. Podobnie w kontekście żetonów mówimy o dokładaniu i zabieraniu żetonów – a w kontekście matematyki o działaniach dodawania i odejmowania. Zwracamy również uwagę na to, by znaki działań czytać słownie jako dodać/odjąć, a nie tylko czytając nazwę znaku plus/minus. Jesteśmy przekonani, że modelowanie wyrażeń arytmetycznych i algebraicznych z dbałością o czystość i poprawność językową jest dużą wartością i ją rekomendujemy.

CZĘŚĆ 1

Część 1
Temat: Wprowadzenie do wyrażeń algebraicznych

AKTYWNOŚĆ 1: Wprowadzenie do modeli. Zasady gry – <u>żetony przeciwne</u>

Na najbliższych lekcjach będziemy mówić o wyrażeniach algebraicznych (inaczej niż do tej pory)*
**) dodajemy jeśli temat był już wcześniej realizowany.*

W tym celu będziemy wykorzystywali nowe modele i dobrze *znane wam już żetony.*

O żetonach wiemy już, że:

⊕ ***Biały żeton → oznacza/reprezentuje liczbę* 1**

⊖ ***Czarny żeton → reprezentuje/oznacza liczbę*** $-\mathbf{1}$

UWAGA!

Odrywamy się od terminu dodatni/ujemny i już celowo ich NIE UŻYWAMY, aby nie budować <u>błędnych skojarzeń typu:</u> $x > 0$, $-x < 0$.

Przypomnienie umowy z żetonami:

Jak mówiliśmy o białym i czarnym żetonie?

- *biały i czarny tworzą parę neutralną*
- *biały i czarny tworzą parę, która ma wartość 0*
- *biały z czarnym tworzą parę, która reprezentuje 0*
- *biały i czarny tworzą parę żetonów przeciwnych*
- *czarny z białym się zjadają nawzajem*
- ***czarny z białym (dwa żetony różnych kolorów) unicestwiają się/znikają***

DYSKUSJA WPROWADZAJĄCA DALSZE MODELE

Pamiętamy, że takie dwa żetony różnych kolorów mają w sumie wartość zero (reprezentują wartość 0) i dlatego nazwaliśmy je <u>żetonami przeciwnymi.</u>

Przypomnijmy sobie definicję i zapis liczb przeciwnych (przebieg dialogu może być podobny do poniższego, jak w części 3 cyklu lekcji o liczbach całkowitych).

- Mówiliśmy do tej pory o żetonach czarnych i białych. Jaka była najważniejsza zasada dotycząca białego i czarnego żetonu wziętych razem?

U: Razem się unicestwiają, tworzą parę neutralną

- Jak możemy to zapisać używając liczb 1 i -1?

U: 1 + (-1) = 0

- Jaki można byłoby nazwać takie żetony? Jakie są dla siebie skoro się unicestwiają? Podajcie Wasze pomysły.

(Uczniowie proponują różne nazwy – burza mózgów)

*- Podaliście różne ciekawe propozycje. Od tej pory umówimy się, że nazwiemy je **ŻETONAMI PRZECIWNYMI**, ponieważ to właśnie matematycy umówili się:*

***Dwie liczby, które w sumie dają zero nazywają się LICZBAMI PRZECIWNYMI**, tak jak żetony w sumie się unicestwiają.*

- Jaka liczba jest liczbą przeciwną do liczby 2?

U: -2

- Dlaczego?

U: bo 2 dodać -2 daje wynik 0

- Jaka liczba jest liczbą przeciwną do liczby -2?

U: 2

- Dlaczego?

U: bo -2 dodać 2 daje wynik 0

- Podajcie liczbę przeciwną do liczby -100.

U: 100

- Dlaczego?

(….)

[Liczbę przykładów dobiera nauczyciel w zależności od potrzeby]

- Jak różnią się zapisem liczba i liczba do niej przeciwna?

U: minusem przed zapisem liczby

-To jeszcze zwróćmy uwagę na ten zapis. Jak zapiszemy liczbę przeciwną do 2?

U: -2

Matematycy uzgodnili też, że liczbę przeciwną do danej będą zapisywać dopisując znak minus przez tą liczbą. *To jest taka umowa matematyków. Ma ona tę zaletę że leniwy matematyk nie musi liczyć w głowie co jest liczbą przeciwną do danej, tylko automatycznie zapisuje taką liczbę poprzez dopisanie znaku minus.*

- W takim razie jak zapiszemy liczbę przeciwną do -2?

U: - (-2)

Gdyby odpowiedź była 2:

- A jak można inaczej skoro tworząc liczbę przeciwną dopisujemy minus na początku?

U: - (-2)

Jeśli uczniowie tego nie powiedzą, to nauczyciel naprowadza.

- Jak mówię przeciwna do, to jaki znak dopisuję? Co to oznacza gdy mam zapisać w ten sposób liczbę przeciwną do -2?

- Tak, a my wiemy, że liczbą przeciwną do -2 jest jaka liczba?

U: 2

- Co możemy powiedzieć o liczbach 2 i -(-2)?

U: -(-2) = 2

- Mieliśmy żetony reprezentujące liczby: 1 *i liczbę przeciwną do* $1 -$ *żetony okrągłe.*

Teraz chcemy mieć w jakiś sposób reprezentowane dowolne liczby – ***jakieś liczby***, nie tylko 1 *i* -1. *Podajcie przykłady* takich dowolnych liczb.

U: $4,\ 7,\ -12,\ 0,\ -23,\ -13{,}4\,;\ -\frac{3}{5}, 2\pi, -\sqrt{3};$

- Tak, dowolne o jakich pomyślimy, ogólnie powiedzmy liczby, których wartości na razie nie ustalamy *- oznaczmy je literą* x.

Żeby nam się nie myliły żetony, użyjmy teraz *modeli podłużnych, w kształcie takiego prostokąta:*

$\boxed{\;x\;}$

Biały podłużny żeton → przedstawia x

[Nauczyciel przypina model do tablicy]

UWAGA do uczniów:
Możemy też nieraz użyć innej litery, by zapisać pewną dowolną liczbę – na przykład a, b.

- Jaką liczbą może być x*?*

U: Dowolną, każdą

- Czy x *może być liczbą ujemną?*

U: Tak

- *Chcemy mieć podobne modele jak dla liczb całkowitych.* ***Żetony białe i czarne były żetonami przeciwnymi.*** *Czyli co będzie oznaczał ten czarny podłużny żeton?*

$-x$

Czarny podłużny żeton → przedstawia -x

[Nauczyciel przypina model na tablicy]

U: liczbę przeciwną do x

- *Jak zapiszemy liczbę przeciwną do* x*?*

U: $-x$

- *Czy* $-x$ *oznacza liczbę ujemną?*

U: Nie, nie zawsze, to zależy jaką liczbą jest x.

[W razie trudności:

N: A jeśli weźmiemy za x *liczbę* -3*, to jaką liczba jest* $-x$*?*

Akceptujemy obie odpowiedzi 3 lub -(-3), w przypadku odpowiedzi -(-3) pytamy:

- *Czyli jaka to liczba?]*

- *Podsumujmy:*

Uwaga:
$-x$ ***, czyli wyrażenie x ze znakiem minus oznacza wyrażenie PRZECIWNE DO x***

Co jakiś czas podczas lekcji należy pytać uczniów, co oznacza $-x$***, by to utrwalać.***

- *A jak zapisalibyśmy wyrażenie przeciwne do* $-x$*?*

U: $-(-x)$

- *A z drugiej strony umówiliśmy się, że przeciwny do żetonu czarnego podłużnego przedstawiającego -x jest biały, a biały podłużny żeton przedstawia jakie wyrażenie?*

U: x

- *Czyli z jednej strony wiemy, że to jest x i jednocześnie –(-x), czyli co możemy powiedzieć o wyrażeniach x i –(-x)?*

U: $-(-x) = x$

- Chcielibyśmy mieć też żeton, który oznaczałby x^2, czyli kwadrat liczby x.
Jaki kształt proponujecie żeby było nam łatwo zapamiętać i żeby nam się nie myliło?

U: kwadratowy

- Podobnie, jak poprzednio umawiamy się, że:

$\boxed{x^2}$ *oznacza x^2 czyli kwadrat pewnej liczby*

$\boxed{-x^2}$ *oznacza $-x^2$ czyli liczbę przeciwną do kwadratu pewnej liczby*

[Nauczyciel przypina modele do tablicy]

Podsumujmy:

Biały i czarny żeton tego samego kształtu tworzą parę neutralną czyli – unicestwiają się, inaczej – dają nam w sumie 0; i dlatego ***dwa żetony jednakowego kształtu a różnych kolorów nazwiemy żetonami przeciwnymi.***

MINUS czytamy jako „liczba przeciwna/wyrażenie przeciwne do …”

AKTYWNOŚĆ 2: Zapisywanie wyrażeń algebraicznych z modelu

AKTYWNOŚĆ 2a

Nauczyciel układa na tablicy żetony [magnetyczne lub wirtualne na tablicy interaktywnej]. Uczniowie odpowiadają i uzasadniają, jakie wyrażenia reprezentują te żetony.

LP	Nauczyciel układa żetony na tablicy	Uczniowie odpowiadają	*Uwagi dla nauczyciela* / Kwestie do dyskusji
1.	$\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{x}$	$4x$	*UWAGI:* *- Układamy żetony w sposób nieuporządkowany, „chaotycznie”.*
2.	$\boxed{x^2}$ $\boxed{x^2}$	$2x^2$	

AKTYWNOŚĆ 2b

- Jakie jest wyrażenie przeciwne do 4x?

U: -4x

- Jak przedstawimy go na żetonach?

U: $-x$ $-x$ $-x$ $-x$

- Jakie jest wyrażenie przeciwne do $2x^2$?

U: $-2x^2$

- Jak przedstawimy go na żetonach?

U: $-x^2$ $-x^2$

Nauczyciel układa na tablicy żetony [magnetyczne lub wirtualne na tablicy interaktywnej]. Uczniowie odpowiadają i uzasadniają, jakie wyrażenia reprezentują te żetony.

1.	$-x$ $-x$ $-x$	$-3x$
2.	$-x^2$ $-x^2$ $-x^2$	$-3x^2$
3.	x $-x$	0
4.	$-x^2$ x^2	0

AKTYWNOŚĆ 2c

Nauczyciel <u>mówi</u> uczniom, jakie żetony mają ułożyć (może jednocześnie sam układać). Uczniowie **samodzielnie układają na ławkach** (żetony zajmują dużo miejsca ale można je układać tak, by nachodziły na siebie). Uczniowie odpowiadają i uzasadniają, **jakie wyrażenie algebraiczne zostało przedstawione.**

Pogadanka z klasą na temat najbardziej efektywnego sposobu układania.

Projekt współfinansowany w ramach programu Unii Europejskiej Erasmus+

Nauczyciel mówi	Uczniowie układają żetony	Odpowiedź ucznia	*Uwagi dla nauczyciela* / Kwestie do dyskusji
Bierzemy żetony kwadratowe: 4 białe i 1 czarny	x^2 x^2 x^2 x^2 $-x^2$	$3x^2$	*– Uczniowie sami kładą jakkolwiek chcą na ławce; jeśli jedni ułożą chaotycznie, a inni uporządkowane jedno pod drugim to jest okazja, by porozmawiać nad sposobami – który bardziej przydatny* *- Jeśli porządkowanie (układanie białych nad czarnymi lub odwrotnie) nie wyjdzie naturalnie, spontanicznie od uczniów, to celowo zadać pytania o najbardziej efektywny sposób układania.*
Bierzemy żetony podłużne: 3 białe i 5 czarnych	x $-x$ $-x$ x x $-x$ $-x$ $-x$	$-2x$	

Zauważamy (lub przypominamy), że jeżeli mamy żetony tego samego kształtu i rozmiaru to zasady, które poznaliśmy przy pracy z żetonami na liczbach ujemnych przenoszą się.